Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Bestimme die komplexe Zahl z, wenn $3z+2\overline{z}=5+2i$, wo $\overline{z}$ die konjugierte Zahl von z ist.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $(f\circ f\circ f)(x)=x+3$, für jede reelle Zahl x.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_3(2x+3)-\log_3 x=1$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine dreistellige natürliche Zahl durch 10 teilbar ist.

5p **5.** Bestimme die reelle Zahl a so, dass die Vektoren $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(5a-1)\vec{j}$ und $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ kollinear sind.

5p **6.** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn $AB=6$, $AC=10$ und $\cos A=\frac{3}{5}$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Berechne $\det(M(-1))$.

5p **b)** Beweise, dass $M(x)+M(y)=M(0)+M(x+y)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **c)** Bestimme die Paare von natürlichen Zahlen m und n, wenn die Summe der Elemente der Matrix $M(m)\cdot M(1)$ gleich mit der Summe der Elemente der Matrix $M(1)\cdot M(n)$ ist.

2. In der Menge der reellen Zahlen wird die assoziative Verknüpfung $x*y=4x+4y-4xy-3$ definiert.

5p **a)** Beweise, dass $x*y=1-4(x-1)(y-1)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Zeige, dass $x*\frac{1}{x}\geq 1$, für jedes $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x, für welche $x*x*x*x=x$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5\ln x-x^2-3x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Beweise, dass die Funktion f konkav auf $(0,+\infty)$ ist.

5p **c)** Beweise, dass $5\ln x\leq x^2+3x-4$, für jedes $x\in(0,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$.

5p **a)** Beweise, dass jede Stammfunktion der Funktion f steigend auf $\mathbb{R}$ ist.

5p **b)** Berechne $\int_0^1\left(f(x)-x^2e^x-5e^x\right)dx$.

5p **c)** Beweise, dass $\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$.