

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy az $n = |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$ természetes szám!
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 11 - x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - 11x$ függvények. Oldd meg a valós számok halmazán az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg hány olyan háromjegyű természetes szám képezhető, amelynek számjegyei különböző páratlan számok!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-3,3)$, $B(1,3)$ és $C(1,5)$ pontok. Számítsd ki az ABC háromszög területét!
- 5p 6. Számítsd ki az ABC háromszög köré írt kör sugarának hosszát, ha $BC = 4$, $B = \frac{\pi}{3}$ és $C = \frac{\pi}{6}$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(2)) = 1$.
- 5p b) Igazold, hogy $A(x)A(y) = A(x+y-2)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg az m valós számokat, amelyekre $A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(10) = A(m^2 + m + 17)$.
2. Adott az $f = X^3 - 4X^2 + 5X + a$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(1) - f(-1) = 12$.
- 5p b) Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az f polinom osztható az $X - 2$ polinommal!
- 5p c) Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az f polinom minden gyöke egész szám!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képén azon pontnak az abszcisszáját, amelyben az f függvény grafikus képéhez húzott érintő merőleges az Oy tengelyre!
- 5p c) Igazold, hogy $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^3 f(x) dx = 9$.

5p b) Igazold, hogy $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

5p c) Minden nullától különböző n természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^4 f^n(x) dx$ szám. Igazold, hogy $I_{n+1} \leq 4I_n$, bármely n nullától különböző természetes szám esetén!