Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p	**1.** Zeige, dass die Zahl $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ ganz ist, wobei $i^2=-1$.
5p	**2.** Bestimme die reelle Zahl a, wenn der Punkt $A(a,3)$ zu dem Schaubild der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ gehört.
5p	**3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2019^x+2019^{-x}=2$.
5p	**4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Einerziffer einer zweistelligen natürlichen Zahl ungerade ist.
5p	**5.** Im kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(3,-3)$ und $B(2,-2)$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch A läuft und senkrecht auf AB steht.
5p	**6.** Zeige, dass $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, für alle reellen Zahlen a und b.

II. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist.
5p	**a)** Zeige, dass $\det(A(a))=0$, für jede reelle Zahl a.
5p	**b)** Beweise, dass $A(a)A(b)=2A(ab)$, für alle reellen Zahlen a und b.
5p	**c)** Beweise, dass alle Elemente der Matrix $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ ganze Zahlen sind.
	2. Gegeben ist das Polynom $f=X^3+X^2+mX+n$, wo m und n reelle Zahlen sind.
5p	**a)** Zeige, dass $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, für alle reellen Zahlen m und n.
5p	**b)** Bestimme die reellen Zahlen m und n, falls das Polynom f durch das Polynom X^2-1 teilbar ist.
5p	**c)** Beweise, dass $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, für alle reellen Zahlen m und n, wo x_1, x_2 und x_3 die Wurzeln des Polynoms f sind.

III. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.
5p	**a)** Zeige, dass $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f.
5p	**c)** Beweise, dass, für alle $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, die Gleichung $f(x)=a$ genau drei reelle Lösungen hat.

	2. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.
5p	**a)** Zeige, dass $\int_1^2 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.
5p	**b)** Beweise, dass der Flächeninhalt der Menge der Punkte der Ebene begrenzt von dem Schaubild der Funktion $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, der Ox- Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=1$ und $x=e$ gleich e^2 ist.
5p	**c)** Beweise, dass $\lim_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.