Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

СУБЈЕКАТ I (30 бодова)

5б **1.** Докажите да број $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ је цели, где $i^2=-1$.

5б **2.** Одредите реални број a, знајући да тачка $A(a,3)$ припада графику функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.

5б **3.** Решите у скупу реалних бројева једначину $2019^x+2019^{-x}=2$.

5б **4.** Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број из скупа двоцифрених природних бројева, овај да има непарну цифру јединица.

5б **5.** У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(3,-3)$ и $B(2,-2)$. Одредите једначину праве d која садржи тачку A и је нормална на AB.

5б **6.** Докажите да $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, за било које реалне бројеве a и b.

СУБЈЕКАТ II (30 бодова)

1. Сматра се матрица $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, где a је реални број.

5б **a)** Докажите да $\det(A(a))=0$, за било који реални број a.

5б **b)** Докажите да $A(a)A(b)=2A(ab)$, за било које реалне бројеве a и b.

5б **c)** Докажите да матрица $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ има све елементе целе бројеве.

2. Сматра се полином $f=X^3+X^2+mX+n$, где m и n су реални бројеви.

5б **a)** Докажите да $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, за било које реалне бројеве m и n.

5б **b)** Одредите реалне бројеве m и n, знајући да полином f је дељив са полиномом X^2-1.

5б **c)** Докажите да $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, за било које реалне бројеве m и n, где x_1, x_2 и x_3 су корени полинома f.

СУБЈЕКАТ III (30 бодова)

1. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

5б **a)** Докажите да $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5б **b)** Одредите интервале монотоније функције f.

5б **c)** Докажите да, за било који $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, једначина $f(x)=a$ има тачно три реална корена.

2. Сматра се функција $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5б **a)** Докажите да $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

5б **b)** Докажите да равна површ одређена од графика функције $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, осе Ox и права једначина $x=1$ и $x=e$ има површину једнаку са e^2.

5б **c)** Докажите да $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.