Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Igazold, hogy az $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ halmaz elemeinek összege 15.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ függvény, ahol m valós szám. Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy az f függvényhez rendelt parabola csúcsának ordinátája 2.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg egy pontosan 10 elemű halmaz legkevesebb 8 elemű részhalmazainak számát!

5p **5.** Az xOy koordináta-rendszerben adottak az $A(5,1)$, $B(-1,3)$ és $C(8,10)$ pontok. Határozd meg a CD szakasz hosszát, ahol D az AB szakasz felezőpontja!

5p **6.** Igazold, hogy $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ és $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Igazold, hogy $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, bármely a és b valós szám esetén!

5p **c)** Határozd meg az n természetes számot, amelyre $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$

2. Adott az $f=X^3-mX^2+2X+3-m$ polinom, ahol m valós szám.

5p **a)** Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy $f(1)=0$.

5p **b)** Ha $m=3$, határozd meg az f polinom gyökeit!

5p **c)** Határozd meg az m valós számot, amelyre $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $+\infty$ -be tartó vízszintes aszimptotájának egyenletét!

5p **c)** Adottak a $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ és $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$ függvények. Igazold, hogy a g és h függvények grafikus képeinek **nincs** egyetlen közös pontja sem!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Igazold, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=-1$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.

5p **c)** Számítsd ki $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.