Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. AUFGABENGRUPPE (30 Punkte)

5p **1.** Seien $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 8 - 3i$ komplexe Zahlen. Zeige, dass $3z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Bestimme die reelle Zahl a, für die $f(a) + f(a+1) = 35$, wobei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2 \cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine einstellige natürliche Zahl n die Beziehung $n(n+1) \geq 42$ erfüllt.

5p **5.** Seien $A(8,4)$, $B(0,6)$ und $C(m,5)$ Punkte im kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die reelle Zahl m, wenn $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Berechne die Länge der Hypotenuse BC des rechtwinkligen Dreiecks ABC, falls $AB = 6$ und der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich 24 ist.

II. AUFGABENGRUPPE (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist, $a > 0$.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Zeige, dass $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, für alle reellen Zahlen a und b, $a > 0$, $b > 0$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a, $a > 0$, wenn $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.

2. Seien x_1, x_2, x_3 die Wurzeln des Polynoms $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, wo m eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Bestimme die reelle Zahl m, wenn $f(-2) = 0$.

5p **b)** Für $m = 1$, bestimme die Wurzeln des Polynoms f.

5p **c)** Sei $a = \frac{x_1^2 + mx_1}{x_2x_3} + \frac{x_2^2 + mx_2}{x_1x_3} + \frac{x_3^2 + mx_3}{x_1x_2}$. Beweise, dass $a \in [3, +\infty)$, für jede reelle Zahl m.

III. AUFGABENGRUPPE (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 1)$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Abszissen der Punkte des Grafen der Funktion f, in denen die Tangente an das Schaubild der Funktion f parallel zur Ox - Achse ist.

5p **c)** Bestimme die reellen Werte von a, für die die Gleichung $f(x) = a$ genau drei reelle Wurzeln hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Zeige, dass jede Stammfunktion der Funktion f streng steigend ist auf dem Intervall $(1, +\infty)$.

5p **b)** Berechne $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a, $a > e$, falls der Flächeninhalt begrenzt von dem Grafen der Funktion $g:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, der Ox - Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = e$ und $x = a$ gleich $2a$ ist.