Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+2i\sqrt{3}+3i^2-\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)=4i\sqrt{3}$	**3p**
	Partea reală a lui z este 0	**2p**
2.	$f(3)<0$, $f(4)<0$, $f(5)<0$	**2p**
	$f(0)>0$, $f(1)>0$ și $f(2)>0$, deci $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$	**3p**
3.	$(\log_2 x-1)^2=0\Rightarrow \log_2 x=1$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=$	**3p**
	$=\dfrac{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}=$	**3p**
	$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
6.	$1-2\sin^2 x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{3}$	**3p**
	Cum $x\in(\pi,2\pi)$, obținem $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=10+6+4-4-4-15=-3$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}2x-y+2z=4\\3x-y+2z=1\\2x-y+5z=-2\end{cases}$ și, cum $\det(A(-1))=3\neq 0$, sistemul de ecuații este compatibil determinat	**2p**
	$x=-3$, $y=-14$, $z=-2$	**3p**
c)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&2\\3&a&2\\2&a&5\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=-3a$, pentru orice număr real a și, cum $\det(A(a))=0$, obținem $a=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și $\begin{vmatrix}2&2&4\\3&2&1\\2&5&b\end{vmatrix}=0$, deci $38-2b=0$, de unde obținem $b=19$	**3p**

2.a)	$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} =$	**3p**
	$= \sqrt{x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)+1} = \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y \in G$	**2p**
b)	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1} = x \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right) = x^2-1$, pentru orice $x \in G$, deci $e^2-1=1$ și, cum $e \in G$, obținem $e=\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $\sqrt{2} * x = \sqrt{(2-1)\left(x^2-1\right)+1} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$, obținem că $e=\sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x) * f(y) = \sqrt{\left(f^2(x)-1\right)\left(f^2(y)-1\right)+1} = \sqrt{(x+1-1)(y+1-1)+1} = \sqrt{xy+1} = f(xy)$, pentru orice $x,\ y \in M$, deci f este un morfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**3p**
	f este continuă, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+1)e^{-x}\cdot(-1) =$	**3p**
	$= \left(1-(x+1)\right)e^{-x} = -xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n} = \left(\dfrac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+2}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x} = 0$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=1$ și f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m \in (0,1)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 \left(f(x)-x\right)dx = \int\limits_0^1 \dfrac{2}{x+1}dx = 2\ln(x+1)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2$	**2p**
b)	$\int\limits_1^e \left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx = \int\limits_1^e x\ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e - \int\limits_1^e \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx =$	**3p**
	$= \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	F este primitivă a lui f și $F(0)=0$, deci $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x+1)$	**1p**
	$\int\limits_0^1 2f(x)F(x)dx = \int\limits_0^1 2F(x)F'(x)dx = F^2(x)\Big\vert_0^1 = \dfrac{1}{4} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2$	**2p**
	$\dfrac{1}{4} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2 = \dfrac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a \Leftrightarrow 4\ln^2 2 = \ln^2 a$, deci $\ln a = -2\ln 2$ sau $\ln a = 2\ln 2$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{4}$ sau $a=4$, care convin	**2p**