Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADASOR (30 pont)

5p **1.** Igazold, hogy $a=3+2\sqrt{2}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ egy természetes szám!

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ függvény. Igazold, hogy $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $9^{x^2}=3\cdot 3^x$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg az n nemnulla természetes számot tudva azt, hogy az $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ halmaznak pontosan 10 kételemű részhalmaza van!

5p **5.** Az xOy koordináta rendszerben adottak az $M(1,0)$, $N(7,0)$ és $A(a,3)$ pontok, ahol a valós szám. Tudva, hogy $AM=AN$ igazold, hogy az AO szakasz hossza 5.

5p **6.** Adott az $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, amelyre $3\cos x-2=2\cos 2x$. Számítsd ki a $\cos x$ értékét!

II. FELADASOR (30 pont)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(0))=3$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, bármely a valós szám esetén!

5p **c)** Határozd meg az a természetes számot, amelyre az egyenletrendszernek egyetlen (x_0,y_0,z_0) megoldása van és x_0, y_0, z_0 természetes számok!

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$ műveletet!

5p **a)** Igazold, hogy $0*0=1$.

5p **b)** Igazold, hogy a „$*$” művelet kommutatív!

5p **c)** Határozd meg az x valós számot, amelyre $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

III. FELADASOR (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x)=\frac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képének az $x=1$ abszcisszájú pontjában, a grafikus képhez húzott érintő egyenletét!

5p **c)** Igazold, hogy bármely $m\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ esetén, az $f(x)=m$ egyenletnek pontosan négy valós gyöke van!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_1^2 x\cdot\dfrac{1}{f(x)}dx=\dfrac{31}{3}$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$, ahol $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Minden n nemnulla természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)dx$ számot. Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.