

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 bodeve)

- 56 1. Docažite da broj  $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$  je prirodni, gde  $i^2 = -1$ .
- 56 2. Smatra se funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + a$ , gde  $a$  je realan broj. Odrдите realni broj  $a$ , znajući da  $f(x) + f(1-x) = 7$ , za bilo koji realan broj  $x$ .
- 56 3. Reshite u skupu realnih brojeva jėdnachinu  $5^x + 5^{-x} = 2$ .
- 56 4. Smatra se skup  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Odrдите broj podskupova sa tri elementa iz  $A$ , koji sadrđu 1.
- 56 5. U kartezijanском систему  $xOy$  smatra se tачка  $M(-4, 4)$ . Odrдите jėdnachinu prave  $d$  koja sadrđu tачку  $M$  i je normalna na pravu  $OM$ .
- 56 6. Trougaо  $ABC$  je pravougli u  $A$  и  $\sin B = \cos B$ . Doкажите da trougaо  $ABC$  je jėdnakokrak.

SUBIECTUL II

(30 bodeve)

1. Smatra se матрица  $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ , gde  $a$  je realni broj.
- 56 a) Doкажите da  $\det(A(0)) = -1$ .
- 56 b) Doкажите da, za bilo koji realni broj  $a$ , матрица  $A(a)$  prihvatі inverznu матрицу.
- 56 c) Odrдите cele brojeve  $a$  za koje inverzna матрица матрице  $A(a)$  ima sve elemente cele brojeve.
2. Na skupu  $A = [1, +\infty)$  definiше se zakon sлагања  $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$ .
- 56 a) Doкажите da  $1 * 2020 = 1$ .
- 56 b) Doкажите da  $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$ , za bilo koje  $x, y \in A$ .
- 56 c) Odrдите  $x \in A$  tako da  $x * x = x$ .

SUBIECTUL III

(30 bodeve)

1. Smatra se funkcija  $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$ .
- 56 a) Doкажите da  $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .
- 56 b) Odrдите jėdnachinu horizontalne asimptote prema  $+\infty$  na grafiku funkcije  $f$ .
- 56 c) Doкажите da  $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$ , za bilo koji  $x \in (2, +\infty)$ .
2. Smatra se funkcija  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ .
- 56 a) Doкажите da  $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$ .

56 b) Докажите да  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$ .

56 c) За сваки природни ненулти број  $n$ , сматра се број  $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$ . Докажите да  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .