**Examenul de bacalaureat național 2018**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**THEMA I** **(30 Punkte)**

**5p** **1.** Bestimme das Produkt der ersten drei Glieder der geometrischen Folge $(b_n)_{n\geq 1}$, falls $b_2 = 4$.

**5p** **2.** Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ und $g(x) = 2018 - x$. Berechne $g(f(1))$.

**5p** **3.** Löse die Gleichung $25^x = 5^{x^2}$ in der Menge der reellen Zahlen.

**5p** **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zehnerziffer einer gewählten zweistelligen natürlichen Zahl $9$ ist.

**5p** **5.** Im kartesischen Koordinatensystem $xOy$ wird die Gerade $d$ mit der Gleichung $(a-1)x - a^2 y - a^2 = 0$, wo $a$ eine reelle von Null verschiedene Zahl ist, gegeben. Bestimme die reelle von Null verschiedene Zahl $a$, wenn $d$ zu der $Ox$-Achse parallel ist

**5p** **6.** Zeige, dass $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$, falls $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

**THEMA II** **(30 Punkte)**

**1.** Gegeben sind die Matrizen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, wo $x$ eine reelle Zahl ist.

**5p** **a)** Zeige, dass $\det(A(1)) = -7$.

**5p** **b)** Beweise, dass $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$, für alle reellen Zahlen $x$ und $y$.

**5p** **c)** Bestimme die reellen Zahlen $a$, falls $(aA(-1) + A(a))A(0) = (a^2+7)I_2$.

**2.** Gegeben ist das Polynom $f = 4X^3 - 6X + m$, wo $m$ eine reelle Zahl ist.

**5p** **a)** Für $m = 2$, zeige, dass $f(1) = 0$.

**5p** **b)** Beweise, dass für jede reelle Zahl $m$ das Polynom $f$ **nicht** teilbar ist durch das Polynom $X^2 + X + 1$.

**5p** **c)** Bestimme die reelle von Null verschiedene Zahl $m$, falls $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$, wo $x_1$, $x_2$ und $x_3$ die Wurzeln des Polynoms $f$ sind.

**THEMA III** **(30 Punkte)**

**1.** Gegeben ist die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Zeige, dass $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

**5p** **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion $f$ im Punkt mit der Abszisse $x = 1$, der zum Grafen der Funktion $f$ gehört.

**5p** **c)** Beweise, dass $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, für alle $x \in (0, +\infty)$.

**2.** Gegeben ist die Funktion $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$.

**5p** **a)** Zeige, dass $\int_0^2 (x+1) f(x)\, dx = 22$.

**5p** **b)** Berechne $\int_0^1 \left( f(x) - \frac{1}{x+1} \right) e^{x^3} dx$.

**5p** **c)** Bestimme die natürliche von Null verschiedene Zahl $n$, wenn das Volumen des Körpers, der durch Drehung des Grafen der Funktion $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ um die $Ox$-Achse entsteht, gleich $\frac{\pi}{n}$ ist.