Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

THEMA I **(30 Punkte)**

5p **1.** Zeige, dass $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.

5p **2.** Bestimme die reelle Zahl a so, dass die Schaubilder der Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ sich in einem Punkt mit der Abszisse $x=1$ schneiden.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Wie viele natürliche, dreistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern haben als Ziffern Elemente aus der Menge $\{0,1,2,3,4\}$?

5p **5.** Gegeben sind die Geraden d_1 mit der Gleichung $y=ax+2$ und d_2 mit der Gleichung $y=\frac{x}{4}+1$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die reelle Zahl a, wenn die Geraden d_1 und d_2 parallel sind.

5p **6.** Zeige, dass $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, für jede reelle Zahl x.

THEMA II **(30 Punkte)**

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ und $M(x)=I_2+xA$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(M(1)\right)=0$.

5p **b)** Beweise, dass $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, für jede reelle Zahl x.

5p **c)** Bestimme das Paar von natürlichen, von Null verschiedenen Zahlen (m,n) so, dass $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. In der Menge der reellen Zahlen wird die assoziative Verknüpfung $x\circ y=8xy+x+y$ definiert.

5p **a)** Zeige, dass $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $x\circ x=1$.

5p **c)** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Beweise, dass $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, für alle reellen Zahlen x, y und z.

THEMA III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x=0$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **c)** Beweise, dass $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^3 \frac{x\,f(x)}{e^x}dx=9$.

5p	**b)** Beweise, dass jede Stammfunktion der Funktion f einen einzigen Inflexionspunkt hat.
5p	**c)** Bestimme die natürliche, von Null verschiedene Zahl n so, dass die Fläche begrenzt von dem Schaubild der Funktion f, der Ox Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=0$ und $x=n$ den Flächeninhalt 1 beträgt.