

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	2p 3p
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$ $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	3p 2p
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x-1 = x^2 + 2x+1 \Rightarrow x^2 - 3x+2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$, care convin	3p 2p
4.	$\{1, 2, 3\} \subset X \Rightarrow 1, 2, 3 \in X$ $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow X = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $X = \{1, 2, 3, 5\}$ sau $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$	2p 3p
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$ $(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	2p 3p
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$ $r = \frac{S}{p} = \frac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2-\sqrt{2})$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$ $= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$ $x = -9$ sau $x = 0$	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	3p 2p
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$ $= \sqrt[3]{64} = 4$	3p 2p

b)	Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”, atunci $e * x = x$, pentru orice număr real x , deci $e * 0 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{e^2} = 0$ și obținem $e = 0$	3p
	Cum $0 * 8 = 4 \neq 8$, $e = 0$ nu este element neutru al legii de compoziție „ $*$ ”, deci legea de compoziție „ $*$ ” nu are element neutru	2p
c)	De exemplu, pentru $m = 2k^3$ și $n = 2k^3$, unde $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m * n = \sqrt[3]{m^2 + n^2} = \sqrt[3]{(2k^3)^2 + (2k^3)^2} =$	3p
	$= \sqrt[3]{8k^6} = 2k^2 \in \mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m * n$ este natural nenul	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (\sqrt{x+1})' =$	2p
	$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}$, $x \in (-1, +\infty)$	3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$	2p
	Pentru $x \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left(-1, -\frac{3}{4}\right]$ și, pentru $x \in \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$	3p
c)	$\ln x \geq 1$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$ și f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$f(\ln x) \geq f(1) \Rightarrow \ln x - \sqrt{\ln x + 1} \geq 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \ln x \geq \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} - 2 + 5 = \frac{10}{3}$	2p
b)	$F'(x) = f(x)$ și $F''(x) = e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4) = e^x(x^2 - 2x + 1) = e^x(x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$	3p
	$e^x(x - 1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci, pentru orice primitivă F a lui f , obținem $F''(x) \geq 0$, pentru orice număr real x , deci F este convexă	2p
c)	$F'(x) = e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) = e^x(ax^2 + (b + 2a)x + c + b)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	3p
	$ax^2 + (b + 2a)x + c + b = x^2 - 4x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $a = 1$, $b = -6$ și $c = 11$	2p