Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a^2+4ai-4+a^2-4ai-4=$	**3p**
	$=2a^2-8\in\mathbb{R}$	**2p**
2.	$f(x)-1=-\dfrac{2x}{x^2+1}-1=-\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$	**3p**
	Cum $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$, pentru orice număr real x, obținem $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$\sqrt{3}^{x+1}=2^{x+1}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1}=1$	**3p**
	$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3=$	**3p**
	$=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$	**2p**
5.	Dreapta de ecuație $ax+y-5=0$ are panta egală cu $-a$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x-4y+3=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{4}$, deci $a=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\dfrac{3}{\operatorname{tg}x}=2\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0\Rightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)^2=0$	**3p**
	$\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, deci $x=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-1-1-0=-2$	**3p**
b)	$A\cdot B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	**3p**
	$B\cdot A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=I_3$, deci B este inversa matricei A	**2p**

c)	$\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$	**3p**
	$2 \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a+2=2 \Leftrightarrow a=0$	**2p**
2.a)	$i \circ i = i \cdot i \cdot i + i + i =$	**3p**
	$= -i + 2i = i$	**2p**
b)	$z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2 - i + i = iz_1(z_2 - i) + (z_2 - i) + i =$	**3p**
	$= (z_2 - i)(iz_1 + 1) + i = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	**2p**
c)	$z \circ 0 = z$, $0 \circ z = z$, pentru orice număr complex z, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p**
	$z \circ z' = 0 \Leftrightarrow i(z-i)(z'-i) + i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z'-i) = -1$, deci $z' = -\frac{1}{z-i} + i$ și, cum $z = \frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z' = -\frac{2}{1+i-2i} + i = \frac{-1+i}{1-i} = -1$, care este număr real	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = nx^{n-1} - n \cdot \frac{1}{x} = n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x}\right) =$	**3p**
	$= n \cdot \frac{x^n - 1}{x} = \frac{n\left(x^n - 1\right)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n - n\ln x + 1 - x^n}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-n\ln x + 1}{x} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-n \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	Pentru orice $x \in (0,1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0,1] \Leftrightarrow a \in [2, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(x^2+1\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\right\|_0^3 =$	**3p**
	$= \frac{27}{3} + 3 = 12$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}dx = \int_0^1 \left(x^2+1\right)e^{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x^3+3x\right)' e^{x^3+3x}dx = \left.\frac{1}{3}e^{x^3+3x}\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{e^4 - 1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^1 f^7(x)dx = \int_0^1 x'\left(x^2+1\right)^7 dx = \left.x\left(x^2+1\right)^7\right\|_0^1 - \int_0^1 14x^2\left(x^2+1\right)^6 dx = 2^7 - 14\int_0^1 \left(x^2+1-1\right)\left(x^2+1\right)^6 dx =$	**3p**
	$= 128 - 14\int_0^1 \left(x^2+1\right)^7 dx + 14\int_0^1 \left(x^2+1\right)^6 dx$, deci $15\int_0^1 f^7(x)dx - 14\int_0^1 f^6(x)dx = 128$	**2p**