**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_șt-nat***

**Test 9**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde $a$ este număr real. Determinați numerele reale $a$ pentru care graficul funcției $f$ este tangent axei $Ox$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$. |
| **5p** | **4.** Demonstrați că numerele $C_4^1$, $A_4^2$ și $A_5^2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$, pentru care punctele $A$, $B$ și $C$ sunt coliniare. |
| **5p** | **6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului $MNP$, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P)=30°$. |

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$. |
| **5p** | **b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui $a$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă. |
| **5p** | **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție $(x_0,y_0,z_0)$ pentru care $x_0=y_0=z_0$. |
| | **2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$. |
| **5p** | **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”. |
| **5p** | **c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$. |

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,f(x))=2$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$. |
| **5p** | **c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$. |
| **5p** | **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$. |

**5p** **c)** Se consideră numerele reale pozitive $a$, $b$ și $c$. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci $a$, $b$ și $c$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.