Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2+x$. Arătați că $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul G, centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A=1-BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-7$.

5p **a)** Arătați că $5\circ 2=0$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+\log_7 x$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Arătați că $e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p **c)** Determinați $a\in(1,+\infty)$ astfel încât $\int_0^x f\left(e^t\right)dt=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)+\ln(a-1)$, pentru orice număr real x.