

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Test 19

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$ , știind că  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = a + b\sqrt{2}$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ . Arătați că  $f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 3$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x - 4^{\frac{2x+3}{2}} = -7$ .
- 5p 4. Determinați numărul de funcții  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$  cu proprietatea că  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră paralelogramul  $ABCD$  cu  $A(-1, 3)$ ,  $B(3, 5)$  și  $C(-4, -2)$ . Determinați ecuația dreptei  $AD$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , știind că  $\operatorname{tg} 2x = -1$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 2x - y + az = 2 \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1)) = 18$ .
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui  $a$  pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Pentru  $a = 1$ , rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2xy - x - y + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$ , astfel încât  $a * x = a$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p c) Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ . Demonstrați că  $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este crescătoare.
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+2)\sin x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = 1$ .

**5p** b) Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

**5p** c) Determinați numărul natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , pentru care  $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$ .