Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEIL I **(30 Punkte)**

5p	**1.** Bestimme das erste Glied der arithmetischen Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn $a_2 = 3$ und $a_3 = 5$.
5p	**2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Bestimme die natürliche Zahl n, sodass $f(n)=3$.
5p	**3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{x^2-9}=x-1$.
5p	**4.** Bestimme die Anzahl der Teilmengen mit drei Elementen der Menge $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Im kartesischen Koordinatensystem xOy seien die Punkte $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ und $Q(1,a)$, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, sodass das Viereck $MNPQ$ ein Trapez mit den Grundlinien MN und PQ ist.
5p	**6**. Berechne die Länge der Hypotenuse BC des rechtwinkligen Dreiecks ABC, in dem $AB=5$ und $\cos B=\frac{1}{2}$.

TEIL II **(30 Punkte)**

	1. Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, wo a und b reelle Zahlen sind.
5p	**a)** Zeige, dass $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, für alle reellen Zahlen a und b.
5p	**b)** Gegeben ist die Matrix $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sodass $A\cdot X=X\cdot A$. Beweise, dass, wenn a und b reelle verschiedene Zahlen sind, dann existieren die reellen Zahlen x und t, sodass $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Für $a=4$ und $b=0$, bestimme die Matrizen $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sodass $Y\cdot Y=A$.
	2. Auf der Menge $M=[0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.
5p	**a)** Zeige, dass $3*3=12$.
5p	**b)** Beweise, dass $x*0=0*x=x$, für jedes $x\in M$.
5p	**c)** Bestimme $x\in M$, sodass $(x^2+2x)*3=7$.

TEIL III **(30 Punkte)**

	1. Gegeben ist die Funktion $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.
5p	**a)** Zeige, dass $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Zeige, dass die Funktion f konvex ist.
5p	**c)** Gegeben ist die Funktion $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Beweise, dass, wenn $x_1,x_2\in(-1,0]$, sodass $x_1\leq x_2$, dann $g(x_1)\geq g(x_2)$.
	2. Gegeben ist die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.
5p	**a)** Zeige, dass $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Zeige, dass $\int_0^1 x^2(f(x))^3dx=\frac{1}{12}$.
5p	**c)** Beweise, dass $\int_0^1 (f(x))^{n+1}dx\leq\int_0^1 (f(x))^n dx$, für jede von null verschiedene natürliche Zahl n.