Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEIL I (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_1 = 2$ und der Differenz $r = 3$. Berechne a_3.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Bestimme die reellen Zahlen x, sodass $f\left(x^2\right)=9$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl aus der Menge $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ein Teiler von 100 ist.

5p **5.** Gegeben ist ein Punkt P in der Ebene des Parallelogramms $ABCD$. Zeige, dass $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Zeige, dass $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, für jede reelle Zahl x.

TEIL II (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(0)\right)=36$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen a, sodass $\det\left(A(a)-(12+a)I_2\right)=0$, wobei $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Gegeben ist die Matrix $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $X\cdot X=A(0)$. Zeige, dass mindestens ein Element aus der Matrix X eine irrationale Zahl ist.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definieren wir die Verknüpfung $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Zeige, dass $1\circ 1=0$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl a, sodass $x\circ a=x$, für jede reelle Zahl x.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x, sodass $x\circ x^6=4$.

TEIL III (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Berechne $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Beweise, dass die Ox-Achse tangent an das Schaubild der Funktion f ist.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Zeige, dass $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.