

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

PRIMO QUESITO

(30 puncte)

- 5p 1. Si considera la progression aritmetica $(a_n)_{n \geq 1}$ con $a_1 = 2$ e la ragione $r = 3$. Calcolate a_3 .
- 5p 2. Si considera la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinate i numeri reali x per i quali $f(x^2) = 9$.
- 5p 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$.
- 5p 4. Calcolate la probabilità che, scegliendo un numero dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, esso sia un divisore di 100.
- 5p 5. Si considera un punto P sul piano del paralelogramma $ABCD$. Dimostrate che $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.
- 5p 6. Dimostrate che $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, per qualunque numero reale x .

SECONDO QUESITO

(30 puncte)

1. Si considera la matrice $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$, con a numero reale.
- 5p a) Dimostrate che $\det(A(0)) = 36$.
- 5p b) Determinate i numeri reali a per i quali $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$, con $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Si considera la matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avente la proprietă $X \cdot X = A(0)$. Dimostrate che almeno un elemento della matrice X è numero irrazionale.
2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$.
- 5p a) Dimostrate che $1 \circ 1 = 0$.
- 5p b) Determinate il numero reale a per il quale $x \circ a = x$, per qualunque numero reale x .
- 5p c) Determinate i numeri reali x per i quali $x \circ x^6 = 4$.

TERZO QUESITO

(30 puncte)

1. Si considera la funzione $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$.
- 5p a) Dimostrate che $f'(x) = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x}$.
- 5p c) Dimostrate che l'asse Ox è tangente al grafico della funzione f .
2. Si considera la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p a) Dimostrate che $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) f(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Dimostrate che $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right) dx = \frac{1}{2} \ln 5$.
- 5p c) Dimostrate che $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right) \ln x dx = \frac{e^2 + 5}{4}$.