

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M<sub>șt-nat</sub>**

**Varianta 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**I. FELADATSOR**

**(30 punct)**

- 5p** 1. Az  $(a_n)_{n \geq 1}$  számtani haladványban  $a_1 = 2$  és az állandó különbség  $r = 3$ . Számítsd ki  $a_3$  értékét!
- 5p** 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$  függvény. Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $f(x^2) = 9$ .
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazában a  $3^{2x+2} - 3^{2x} = 8$  egyenletet!
- 5p** 4. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  halmazból véletlenszerűen kiválasztott szám a 100 osztója legyen!
- 5p** 5. Az  $ABCD$  paralelogramma síkjában adott egy  $P$  pont. Igazold, hogy  $\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{PB} + \overline{PD}$ .
- 5p** 6. Igazold, hogy  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ , bármely  $x$  valós szám esetén!

**II. FELADATSOR**

**(30 punct)**

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} 12+a & a \\ 1+a & 3+a \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $a$  valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy  $\det(A(0)) = 36$ .
- 5p** b) Határozd meg azon  $a$  valós számokat, amelyekre  $\det(A(a) - (12+a)I_2) = 0$ , ahol  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** c) Az  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  olyan mátrix, amelyre  $X \cdot X = A(0)$ . Igazold, hogy az  $X$  mátrixnak legalább egy eleme irracionális szám!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = x + \sqrt[3]{y} - 2$  műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy  $1 \circ 1 = 0$ .
- 5p** b) Határozd meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $x \circ a = x$ , bármely  $x$  valós szám esetén.
- 5p** c) Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $x \circ x^6 = 4$ .

**III. FELADATSOR**

**(30 punct)**

1. Adott az  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$  függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy  $f'(x) = 2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p** b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x}$  határértéket!
- 5p** c) Igazold, hogy az  $Ox$  tengely az  $f$  függvény grafikus képének érintője!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$  függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy  $\int_0^1 (x^2 + 2x + 2) f(x) dx = \frac{1}{2}$ .
- 5p** b) Igazold, hogy  $\int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\right) dx = \frac{1}{2} \ln 5$ .
- 5p** c) Igazold, hogy  $\int_1^e \left(\frac{1}{f(x)} - 2\right) \ln x dx = \frac{e^2 + 5}{4}$ .