Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că $a,b,c\in M$ şi $a<b<c$.

5p **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

5p **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ şi $\det A^2 = \hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le \ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}\right)$.