Examenul de bacalaureat 2010
Proba E - c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

MODEL - REZOLVARE

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.
5p 2. Determinați numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x) = x^2 - 3x + 1$.
5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+3) = 2$.
5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.
5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ și $C(2,-1)$. Calculați distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB.
5p 6. Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^0$. Calculați aria triunghiului ABC.

REZOLVARE SUBIECTUL I

1. Din proprietatea de medie aritmetică avem $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{3+7}{2} = 5^{1p}$ și atunci

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 5-3=2^{1p}$ .Calculăm $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 3 + 9\cdot 2 = 21^{1p}$. Obținem suma primilor 10 termeni: $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}^{1p} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2} = \frac{(3+21)\cdot 10}{2} = 120^{1p}$.

2. $A(m,-1)\in G_f^{\,1p} \Leftrightarrow f(m) = -1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = -1^{1p} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0^{\,1p}$ cu soluțiile $m_1 = 2^{1p}$ sau $m_2 = 1^{1p}$.

3. Condiții: $2x+3>0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2},\infty\right)^{1p}$.

Rezolvare: $2x+3 = 5^2\,^{1p} \Rightarrow 2x = 22^{1p} \Rightarrow x = 11 \in \left(-\frac{3}{2},\infty\right)^{2p}$.

4. Numărul de submulțimi de k elemente dintr-o mulțime cu n elemente este $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}^{1p}$.

În acest caz avem $C_5^3\,^{1p} = \frac{5!}{3!(5-3)!}^{1p} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot \cancel{2}}^{1p} = 10^{1p}$.

5. Fie M mijlocul segmentului $[AB] \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \dfrac{-1+1}{2} = 0^{1p}$ şi

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{-2+2}{2} = 0^{1p}.$$

Formula distanţei: $CM = \sqrt{\left(x_M - x_C\right)^2 + \left(y_M - y_C\right)^2}^{\,1p}$ şi calculăm distanța

$$CM = \sqrt{\left(0-2\right)^2 + \left(0+1\right)^2}^{\,1p} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

6. Formula ariei triunghiului

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\left(BAC\right)}{2}^{2p} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin 30^0}{2}^{1p} = \frac{64 \cdot \frac{1}{2}}{2}^{1p} = \frac{64}{4} = 16^{1p}.$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : M_3(\mathbf{R}) \to M_3(\mathbf{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X \cdot X$.

5p a) Calculaţi $\det(I_3 + B)$.

5p b) Demonstraţi că $f(A) = I_3 + B$.

5p c) Arătaţi că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$.

5p a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x \circ x = x * x$.

5p b) Determinaţi numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p c) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * \left(y+1\right) = 4 \\ \left(x - y\right) \circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbf{Z}$.

REZOLVARE SUBIECTUL II

1.a) $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{1p} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1p}$ şi

$$\det\left(I_3+B\right)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}^{1p}=1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot4+0\cdot3\cdot3-\left(4\cdot1\cdot0+3\cdot0\cdot1+1\cdot3\cdot0\right)=1^{2p}$$

$$\begin{matrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{matrix}$$

(sau determinantul este produsul elementelor de pe diagonală, d=1·1·1=1).

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}^{1p}=$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+1\cdot0+1\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot3+1\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot1+1\cdot3\\ 0\cdot3+3\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+3\cdot3+1\cdot0 & 0\cdot1+3\cdot1+1\cdot3\\ 0\cdot3+0\cdot0+3\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot3+3\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 7\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}^{1p}.$$

$$f\left(A\right)=A^2-3A+I_3{}^{1p}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 7\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}+I_3=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 6 & 7\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 3 & 3\\ 0 & 9 & 3\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}+I_3{}^{1p}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+I_3=B+I_3{}^{1p}.$$

c) $\left(f\left(A\right)\right)^3\overset{din\,\mathbf{b)}}{=}\left(I_3+B\right)^3\ {}^{1p}=I_3^3+3I_3^2B+3I_3B^2+B^3=I_3+3I_3+3B^2+B^3\ {}^{1p}$. Calculăm:

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{1p} \text{ şi}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{1p}=O_3.$$ Se obține:

$$\left(f\left(A\right)\right)^3=I_3+3B+3B^2+O_3=I_3+3B+3B^2\ {}^{1p}.$$

2.a) $\left.\begin{matrix}x\circ x=\left(x-3\right)\left(x-3\right)+3=\left(x-3\right)^2+3\\ x*x=x+x-3=2x-3\end{matrix}\right\}^{1p}\Rightarrow\left(x-3\right)^2+3=2x-3\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(x-3\right)^2-2x+6=0\Rightarrow\left(x-3\right)^2-2\left(x-3\right)=0\ {}^{1p}\Rightarrow\left(x-3\right)\left(x-5\right){}^{1p}=0\Rightarrow$$

$$x-3=0\ \text{ sau }\ x-5=0\ {}^{1p}\Rightarrow x_1=3,x_2=5\Rightarrow S=\left\{3;5\right\}{}^{1p}.$$

b) $x \circ a = 3 \Rightarrow (x-3)(a-3)+3 = 3^{2p} \Rightarrow (x-3)(a-3) = 0^{1p} \Rightarrow a-3=0^{1p} \Rightarrow a = 3 \in \mathbf{Z}^{1p}$.

c) $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3=4^{\,1p} \\ (x-y-3)(1-3)+3=5^{\,1p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ (x-y-3)(-2)=2 \,\big|:(-2) \end{cases}^{1p} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}_{1p}$

$$2x \ \backslash \ = 8 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}^{1p}$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:[0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

5p a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

REZOLVARE SUBIECTUL III

1. a) $f'(x) = (x^3)' + \left(\frac{3}{x}\right)'^{\,1p} = 3x^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right)'^{\,1p} = 3x^2 + 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{1p} = 3x^2 - \frac{3}{x^2}^{\,1p}$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)^{1p} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}^{1p} = f'(1)^{1p} = 3\cdot 1^2 - \frac{3}{1^2}^{\,1p} = 3-3 = 0^{1p}$.

c) Pentru monotonie facem tabelul de variație.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 0 \,\Big|\cdot \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow$$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1^{1p}$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + 0 − − − − − / − − − − − 0 + + + + + +

Pe $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $f'(x)\geq 0$ şi f este crescătoare ($2p$);

Pe $[-1,0)\cup(0,1]$, $f'(x)\leq 0$ şi f este descrescătoare. ($2p$).

2. a) $Vol\left(C_f\right)=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^2\left(2-x^2\right)dx\overset{1p}{=}\pi\left(2\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^4dx\right)^{1p}=$

$$=\pi\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1\overset{1p}{=}\pi\left({}^{5)}2\cdot\frac{1}{3}-\frac{{}^{3)}1}{5}\right)^{1p}=\frac{10-3}{15}\pi=\frac{7}{15}\pi^{\,1p}.$$

b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx\underset{\text{de variabila}}{\overset{\substack{\text{integram}\\\text{prin schimbare}}}{=}}-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{2-x^2}\cdot(-2x)\,dx\overset{1p}{=}-\frac{1}{2}\int_2^1\sqrt{u}\,du^{\;2p}=$$

Notam $2\text{-}x^2=u\,\big|'$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{u^3}\Big|_1^2\overset{1p}{=}\frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)=$$

$-2x\,dx=du$

$$=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}^{\,1p}.$$

Schimbam limitele

de integrare: $\mathrm{u}(0)=2$

$u(1)=2-1^2=1$

c)

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\sqrt{2-t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\int_2^{2-x^2}\sqrt{u}\,du=-\frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_2^{2-x^2}\overset{1p}{=}-\frac{1}{3}\left(\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}-2\sqrt{2}\right)^{1p}=$$

Notam: $2\text{-}t^2=u\,\big|'$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}^{\,1p}$$

$-2t\,dt=du$

$u(0)=2$

$u(x)=2-x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}{3}}{x^2}\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{-2x\sqrt{2-x^2}+\left(2-x^2\right)\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}}{3}}{2x}\overset{1p}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{-2x\sqrt{2-x^2}-x\sqrt{2-x^2}}{3}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{3}\,\cancel{x}\sqrt{2-x^2}}{\cancel{6}_2\,\cancel{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}^{\,1p}.$$