Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x-2$ este axa de simetrie a parabolei $y=x^2+mx+4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.
5p	**4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2+A_n^2=18$.
5p	**5.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: ax+y+2011=0$ și $d_2: x-2y=0$ sunt paralele.
5p	**6.** Fie x un număr real care verifică egalitatea $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Arătați că $\sin 2x=1$.

Rezolvare:

1. $1<2<4<5<9\Rightarrow\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}\Rightarrow 1<\sqrt{2}<2<\sqrt{5}<3\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\in\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\Rightarrow\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbf{Z}=\{2\}$.

2. Axa de simetrie este dreapta verticală ce trece prin vârful parabolei, $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Ecuația dreptei este $x=-\frac{b}{2a}$. Se obține: $-\frac{m}{2\cdot 1}=2\Rightarrow -m=4\Rightarrow m=-4$.

3. Soluția ecuației trigonometrice fundamentale $\sin x=a, a\in[-1,1]$ este $x\in\left\{(-1)^k\arcsin a+kh \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$. Atunci avem:

$$x-\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}\in\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Pentru $k=0\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\in[0,2\pi)$ soluție;

Pentru $k=1\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\pi\Rightarrow x=\pi\in[0,2\pi)$ soluție;

Pentru $k=2\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi\notin[0,2\pi)$ nu este soluție;

Pentru $k=-1\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}-\pi\Rightarrow x=-\pi\notin[0,2\pi)$ nu este soluție.

Atunci $S=\left\{\frac{\pi}{3},\pi\right\}$.

4. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$. Avem

$$C_n^2+A_n^2=18\Leftrightarrow\frac{\cancel{n!}^{\,n(n-1)}}{2!\cancel{(n-2)!}}+\frac{\cancel{n!}^{\,n(n-1)}}{\cancel{(n-2)!}}=18\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{2}+^{2)}n(n-1)=18\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3n(n-1)}{2}=18\Big|\cdot\frac{2}{3}\Leftrightarrow n(n-1)=12.$$ Din $n\in\mathbf{N}$ și sunt numere consecutive

$\Rightarrow 4\cdot 3=12\Rightarrow n=4$.

5. Două drepte sunt paralele dacă coeficienţii variabilelor sunt propoţionali:

$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0,\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0,\ d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$. Atunci avem:

$\frac{a}{1}=\frac{1}{-2}\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$.

6. $\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Obţinem

$\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=2\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\,\Big|\cdot\sin x\cdot\cos x \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\cos x$. Avem

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ 2\sin x\cos x=\sin 2x$. Se obţine $1=\sin 2x\Leftrightarrow \sin 2x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $(A(x)-A(y))^{2011}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $\alpha\in\mathbb{C}$ şi polinomul $f=X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Arătaţi că polinomul f are rădăcina -1.

5p **b)** Arătaţi că, dacă p,q sunt numere complexe şi polinomul $g=X^2+pX+q\in\mathbb{C}[X]$ are două rădăcini distincte, complex conjugate, atunci p şi q sunt numere reale şi $p^2<4q$.

5p **c)** Determinaţi $\alpha\in\mathbb{C}$ pentru care polinomul f are două rădăcini distincte, complex conjugate.

Rezolvare:

1. a) $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in\mathbf{R},\ A(y)=\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, y\in\mathbf{R}$.

$$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+x\cdot0+x^2\cdot0 & 1\cdot y+x\cdot1+x^2\cdot0 & 1\cdot y^2+x\cdot2y+x^2\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot0+2x\cdot0 & 0\cdot y+1\cdot1+2x\cdot0 & 0\cdot y^2+1\cdot2y+2x\cdot1\\ 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot y+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot y^2+0\cdot2y+1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & x+y & x^2+2xy+y^2\\ 0 & 1 & 2x+2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & (x+y)^2\\ 0 & 1 & 2(x+y)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y).$$

b) $$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & y & y^2\\ 0 & 1 & 2y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 1-1 & 2x-2y\\ 0 & 0 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2x-2y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(A(x)-A(y))^2=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2x-2y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2x-2y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(A(x)-A(y)\right)^3=\begin{pmatrix}0&0&2(x-y)^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&x-y&x^2-y^2\\0&0&2x-2y\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3,$$

$\left(A(x)-A(y)\right)^4=\left(A(x)-A(y)\right)^3\cdot O_3=O_3\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^{2011}=O_3$.

c) O matrice $A(x)$ este inversabilă dacă există o matrice $A(y)$ astfel încât $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)=I_3$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Pentru ca matricea $A(x)$ să fie inversabilă trebuie ca determinantul matricei $A(x)$ să fie nenul. Calculăm $\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0,\ \forall x\in\mathbf{R}$. Matricea I_3 este de forma $I_3=A(0)$ și atunci din punctul **a)** avem: $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)=A(x+y)$ și se obține $A(x+y)=A(0)\Rightarrow x+y=0\Rightarrow y=-x$, atunci $A^{-1}(x)=\begin{pmatrix}1&-x&x^2\\0&1&-2x\\0&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbf{R}$ inversa matricei $A(x)$.

2. a) Un polinom $f\in\mathbf{C}[X]$ are rădăcina β dacă $f(\beta)=0$. Calculăm

$f(-1)=(-1)^3+(1-\alpha)(-1)^2+(\alpha-2)i(-1)+\alpha+(\alpha-2)i=\cancel{-1}\cancel{+1}\cancel{-\alpha}\cancel{-(\alpha-2)i}\cancel{+\alpha}\cancel{+(\alpha-2)i}=0$ și atunci -1 este rădăcină.

b) Polinomul g are două rădăcini distincte și complexe $x_1=u+iv,\ x_2=u-iv,\ u,v\in\mathbf{R}$. Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q$, iar

$x_1+x_2=u\cancel{+iv}+u\cancel{-iv}=2u\in\mathbf{R},\ x_1\cdot x_2=(u+iv)(u-iv)=u^2+v^2\in\mathbf{R}$, se obține

$-p=2u\Rightarrow p=-2u\in\mathbf{R},\ q=u^2+v^2\in\mathbf{R}$. Polinomul g are două rădăcini complexe distincte dacă $\Delta<0$

$\Rightarrow\Delta=\sqrt{b^2-4ac}\Rightarrow\Delta=p^2-4q\Rightarrow p^2-4q<0\Rightarrow p^2<4q$.

c) Conform punctului **a)** polinomul f are -1 rădăcină și atunci se poate descompune în factori $f=(X+1)\left(X^2+pX+q\right)$. Determinăm p și q prin împărțirea lui f la $X+1$:

$$\begin{array}{l}\left[X^3+(1-\alpha)X^2+(\alpha-2)iX+\alpha+(\alpha-2)i\right]:(X+1)=X^2-\alpha X+\alpha+(\alpha-2)i\\ \underline{-X^3-\ X^2}\\ \qquad -\alpha X^2+(\alpha-2)iX\\ \qquad \underline{+\alpha X^2\ +\ \alpha X}\\ \qquad\qquad +\left[\alpha+(\alpha-2)i\right]X+\alpha+(\alpha-2)i\\ \qquad\qquad \underline{-\left[\alpha+(\alpha-2)i\right]X-\alpha-(\alpha-2)i}\end{array}$$

Avem $p=-\alpha,\ q=\alpha+(\alpha-2)i$. Din punctul **b)** $p\in\mathbf{R},\ q\in\mathbf{R}\Rightarrow\alpha-2=0\Rightarrow\alpha=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p a) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

5p b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

5p a) Calculați $\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx$.

5p b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $g:[1;2]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{f(x)}{x}$ și de axa Ox.

5p c) Arătați că $(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$.

Rezolvare:

1. a) Calculăm derivata funcției:

$$f'(x)=\left(\ln(x+1)\right)'-\left(\ln(x-1)\right)'=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x-1)'}{x-1}=\frac{^{x-1)}1}{x+1}-\frac{^{x+1)}1}{x-1}=\frac{\cancel{x}-1\cancel{-x}-1}{(x+1)(x-1)}=-\frac{2}{x^2-1}.$$

Dacă $x>1$, atunci $x^2-1>0$ și atunci $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}<0,\forall x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$.

b) Asimptotă orizontală dreapta $y=l$, unde

$$l=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0\in\mathbf{R}\Rightarrow$$ dreapta $y=0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$. Asimptotă verticală la dreapta în punctul 1:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)=\ln\left(\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\frac{1}{0^+}=+\infty$$ și dreapta $x=1$ asimptotă verticală.

Cum funcția este continuă pe domeniul de definiție, nu mai are alte asimptote verticale.
Asimptotă oblică nu are, deoarece are asimptotă orizontală.

c)

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$$

2) a)

$$\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4\left(x-3\sqrt{x}+2\right)dx=\int_1^4\left(x-3x^{\frac{1}{2}}+2\right)dx=\left.\left(\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2x\right)\right|_1^4=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}x^2-\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2x\right)\right|_1^4=\frac{1}{2}\cdot4^2-2\cdot4^{\frac{3}{2}}+2\cdot4-\left(\frac{1}{2}\cdot1^2-2\cdot1^{\frac{3}{2}}+2\cdot1\right)=$$

$$=\cancel{8}\cancel{-16}\cancel{+8}-\frac{1}{2}\cancel{+2}\cancel{-2}=-\frac{1}{2}.$$

b) Determinăm semnul funcției g pe intervalul $[1,2]$: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow \Delta=1, x_1=1, x_2=2$.

Tabelul de semn:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+++++$	0	$-\ -\ -$	0	$+++++$	

$$Aria\left(\Gamma_g\right)=\int_1^2\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx=-\int_1^2\frac{x^2-3x+2}{x}dx=-\int_1^2\left(x-3+\frac{2}{x}\right)dx=-\left.\left(\frac{x^2}{2}-3x+2\ln x\right)\right|_1^2=$$

$$=-\left(\frac{2^2}{2}-3\cdot 2+2\ln 2\right)+\frac{1^2}{2}-3\cdot 1+2\ln 1=-\left(2-6+2\ln 2\right)+\frac{1}{2}-3-0=4-2\ln 2+\frac{1}{2}-3=$$

$$=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

c) Calculăm

$$\int_1^2 f^n(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)'f^n(x)dx=\frac{1}{2}(2x-3)f^n(x)\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2(2x-3)^2\cdot n\cdot f^{n-1}(x)dx=$$

Integrăm prin părți: $\quad =0-\frac{n}{2}\int_1^2\left(4x^2-12x+9\right)\cdot f^{n-1}(x)dx=$

$\int_a^b u\cdot v'=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b u'\cdot v$ $\quad =-\frac{n}{2}\int_1^2\left(4x^2-12x+8+1\right)\cdot f^{n-1}(x)dx=$

$u=f^n(x)\Rightarrow u'=(2x-3)\cdot nf^{n-1}(x)$ $\quad =-\frac{n}{2}\int_1^2\left(4x^2-12x+8\right)\cdot f^{n-1}(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=$

$v'=(2x-3)'\Rightarrow v=2x-3$ $\quad =-\frac{4n}{2}\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)\cdot f^{n-1}(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=$

$$=-\frac{4n}{2}\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx.$$

$$\int_1^2 f^n(x)dx=-2n\int_1^2 f^n(x)dx-\frac{n}{2}\int_1^2 f^{n-1}(x)dx\ \Big|\cdot 2$$

$$2\int_1^2 f^n(x)dx=-4n\int_1^2 f^n(x)dx-n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx$$

$$2\int_1^2 f^n(x)dx+4n\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$$

$(4n+2)\int_1^2 f^n(x)dx+n\int_1^2 f^{n-1}(x)dx=0$ relatia cerută.