Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP, știind că $MN=4$, $MP=5$ și $NP=6$.

Rezolvare

1. Progresia aritmetică: $b=\dfrac{a+c}{2}$ media aritmrtică, sau $b-a=c-b$ diferența a doi termini consecutive este constantă, rația. Aplic metoda a doua:

$$x+1-(x-1)=3x-1-(x+1)\Rightarrow \cancel{x}+1\cancel{-x}+1=3x-1-x-1\Rightarrow 2=2x-2\Rightarrow 4=2x\Rightarrow x=2.$$

2. Se observă ușor că $f(5)=5-5=0$ şi dacă un termen al unui produs este 0, atunci produsul este nul$\Rightarrow f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots f(5)\cdot\ldots f(10)=0$.

3. Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei punem iniţial condiţiile de existenţă:

$\begin{cases} x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\\ x-3\geq 0\Rightarrow x\geq 3\end{cases}\Rightarrow x\in[3,\infty)=D$. Pentru rezolvare ridicăm la pătrat fiecare membru al ecuaţiei: $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2\Leftrightarrow x-1=x^2-6x+9\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$ ecuaţie de gradul II.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a=1, b=-7, c=10, \Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=49-40=9$$

$$x_1=\frac{-(-7)-\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2\notin D$$

$$x_2=\frac{-(-7)+\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5\in D\Rightarrow x=5 \text{ solu}$$

4. Numărul de mulţimi ordonate de k elemente dintr-o mulţime de n elemente este

$A_n^k=\dfrac{P_n}{P_{n+k}}$, $\dfrac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Atunci $A_7^2=\dfrac{7!}{(7-2)!}=\dfrac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot6\cdot7}{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}}=42$.

5. Coordonatele punctului de intersecţie a două drepte se obţine rezolvând sistemul format cu ecuaţiile celor două drepte.

$$\begin{cases}2x-y-6=0\\ -x+2y-6=0\,\big|\cdot 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-6=0\\ -2x+4y-12=0\end{cases}$$

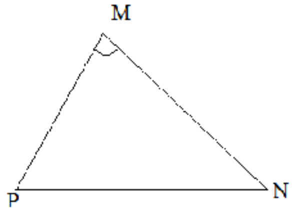
$3y-18=0\Rightarrow 3y=18\,\big|:3\Rightarrow y=6$. Punctul de intersecţie $B(6,6)$.

Înlocuim în prima ecua $x - \ - \ = \ \Rightarrow x = \ \big| \ \Rightarrow x =$

Distanţa dintre punctele $A(x_1,y_1)$ şi $B(x_2,y_2)$ este: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Atunci

$AB=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

6.



Teorema cosinusului: $NP^2=MP^2+MN^2-2\cdot MP\cdot MN\cdot\cos M$.

De aici se obíne: $\cos M=\dfrac{MP^2+MN^2-NP^2}{2\cdot MP\cdot MN}\Rightarrow$

$\cos M=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{5^{(5}}{40}=\dfrac{1}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculaţi A^2-3A.

5p **b)** Demonstraţi că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Arătaţi că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1,x_2 şi x_3.

5p **a)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$.

5p **c)** Arătaţi că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

Rezolvare

1. a) $A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot(-2)&1\cdot(-1)+(-1)\cdot2\\-2\cdot1+2\cdot(-2)&-2\cdot(-1)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}=$

$=3\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=3A\Rightarrow A^2-3A=3A-3A=O_2$ (matricea nulă).

b) $\left.\begin{array}{l}X(a)=I_2+aA,a\in\mathbf{Z}\\X(b)=I_2+bA,b\in\mathbf{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=$

$=I_2^2+I_2bA+aAI_2+aAbA=I_2+bA+aA+abA^2=I_2+aA+bA+3abA=$

$=I_2+(a+b+3ab)A=X(a+b+3ab)$, $a+b+3ab\in\mathbf{Z}$.

c) *O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă determinantul matricei este nenul (matrice nesingulară).* Determinăm matricea $X(a)$ şi calculăm determinantul ei.

$X(a)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&-a\\-2a&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a&-a\\-2a&1+2a\end{pmatrix}$,

$\det(X(a))=\begin{vmatrix}1+a&-a\\-2a&1+2a\end{vmatrix}=(1+a)(1+2a)-(-a)(-2a)=1+2a+a+2a^2-2a^2=1+3a$,

$\det(X(a))\neq0\Rightarrow1+3a\neq0\Rightarrow3a\neq-1\Rightarrow a\neq-\dfrac{1}{3}\notin\mathbf{Z}\Rightarrow\det(X(a))\neq0,\forall a\in\mathbf{Z}$.

2. a) Din relaţiile lui Viete avem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{m}{1} = -m$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = S_1^2 - 2S_2 = (-2)^2 - 2\cdot(-5) = 4 + 10 = 14$$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{^{x_2x_3)}1}{x_1} + \frac{^{x_1x_3)}1}{x_2} + \frac{^{x_1x_2)}1}{x_3} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} \Leftrightarrow S_1 = \frac{S_2}{S_3}$, înlocuim cu valorile de la punctul **a)** şi se obţine: $-2 = \frac{-5}{-m} \Rightarrow -m = \frac{5}{2} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \overset{\text{adun cloloanele la ultima}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_1+x_2+x_3 \end{vmatrix} \overset{\text{factor comun}}{=} (x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= (x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix} = S_1\left(x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2 - \left(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2\right)\right) =$$

$$= S_1(S_2 - 14) = -2(-5 - 14) = 38 \in \mathbf{N}.$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătaţi că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [1,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că graficul funcţiei f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+10}$.

5p **a)** Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă F a funcţiei f este crescătoare pe mulţimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{10} f(x)\,dx$.

Rezolvare

1. a) Definiţia derivatei: dacă există şi este finită, atunci $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Atunci

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2). \text{ Calculăm } f'(x) = (e^x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = e^x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = e^2 + \frac{1}{2^2} = e^2 + \frac{1}{4}.$$

b) Din punctual **a)** $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in [1,+\infty)$. Dacă derivate este pozitivă funcţia este strict crescătoare pe domeniul de definiţie, atunci

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = e^1 - 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in [1,+\infty).$$

c) Asimptotă orizontală: $y = l \in \mathbf{R},\ l = \lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty}\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = \infty - 0 = \infty \Rightarrow$funcţia nu are asimptotă orizontală.

Asimptotă oblică: $y = mx + n,\ m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},\ n = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - x\right)$exist .

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - \frac{1}{x}}{x} = \frac{\infty}{\infty}(regula\ \ lui\ \ L'Hospital) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(e^x - \frac{1}{x}\right)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + \frac{1}{x^2}}{1} =$$

$= \lim_{x \to \infty}\left(e^x + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$, atunci nu exist

2. a) Volumul corpului de rotaţie este $V\left(C_f\right) = \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$. Atunci avem

$$V\left(C_g\right) = \pi \int_0^3 g^2(x)\,dx = \pi \int_0^3 \sqrt{x^2 + 10}dx = \pi \int_0^3 \left(x^2 + 10\right)dx = \pi\left(\int_0^3 x^2 dx + 10\int_0^3 dx\right) =$$

$$= \pi\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 + \left.10x\right|_0^3\right) = \pi\left(\frac{3^3}{3} + 10 \cdot 3\right) = \pi(9 + 30) = 39\pi .$$

b) Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o primitivă a lui *f* pe **R**, atunci $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$, iar *f*(*x*)>0 ⇒

$F'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow F$ este func **R**

c) O funcţie $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ este funcţie pară dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]$. Funcţia dată este funcţie pară deoarece $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 10} = \sqrt{x^2 + 10} = f(x)$. Integrala definită a unei funcţii pare pe un interval simetric $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Atunci $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 2\int_0^{10} f(x)\,dx$.