Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_2 = 5$ și $a_4 = 11$. Calculați a_6.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=cx+d$, unde a,b,c,d sunt numere reale. Arătați că, dacă $f(1)=g(1)$ și $f(3)=g(3)$, atunci $f(5)=g(5)$.

5p **3.** Se notează cu x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2-5x+3=0$. Calculați $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

5p **4.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_2\left(x^2+x+2\right)=2$.

5p **5.** Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\cdot\overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{AN}=3\cdot\overrightarrow{NC}$. Arătați că dreptele MN și BC sunt paralele.

5p **6.** Se consideră un triunghi ABC în care unghiurile A și C au măsurile egale cu 30°, respectiv 90°. Știind că $BC=6$, calculați lungimea laturii AC.

Rezolvare:

1. Din proprietatea de medie aritmetică: $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ obţinem: $a_3=\frac{a_2+a_4}{2}\Rightarrow a_3=\frac{5+11}{2}=8$.

Calculăm raţia: $a_{k+1}-a_k=r$ şi avem: $r=a_3-a_2=8-5=3$. Determinăm primul termen $a_1=a_2-r\Rightarrow a_1=5-3=2$. Aplicăm formula termenului general $a_n=a_1+(n-1)r$ şi aflăm termenul cerut: $a_6=a_1+(6-1)\cdot r\Rightarrow a_6=2+5\cdot 3=2+15=17$.

2. Din
$$\begin{aligned}&f(1)=g(1)\Rightarrow\quad a+b=c+d\\ &f(3)=g(3)\Rightarrow \underline{3a+b=3c+d}\quad(-)\\ &\qquad 2a\ \ \ \ \ =2c\ \ \ \ \ \big|:2\Rightarrow a=c,\end{aligned}$$
iar din prima ecuaţie obţinem $b=d$.

În acest caz obţinem $f(x)=g(x),\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow f(5)=g(5)$.

3. Din relaţiile lui Viète: $ax_2+bx+c=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ obţinem

$x_1+x_2=-\frac{-5}{1}=5,\ x_1\cdot x_2=\frac{3}{1}=3$ şi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{3}$.

4. Determinăm domeniul de rezolvabilitate, punem condiţia
$x^2+x+2>0\Rightarrow\Delta=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$, nu are soluţii reale şi atunci expresia este pozitivă, $\forall x\in\mathbf{R}$. Din definiţia funcţiei logaritmice $\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$ obţinem
$x^2+x+2=2^2\Rightarrow x^2+x+2=4\Rightarrow x^2+x-2=0$ cu soluţiile
$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$,
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x_1=\frac{-1-3}{2}=-2,\ x_2=\frac{-1+3}{2}=1,\ S=\{-2,1\}$.

5. Din $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\frac{AM}{MB}=3,\ M\in(AB)$ şi $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}\Rightarrow\frac{AN}{NC}=3,\ N\in(AC)$ obţinem
$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$. Din reciproca teoremei lui Thales
Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporţionale, atunci dreapta este paralelă cu latura a treia a triunghiului.
avem: $MN\parallel BC$.

6. Din $m\left(\hat{C}\right)=90^0 \Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic cu AB ipotenuza triunghiului. $\text{ctg}x=\dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$

$$\text{ctg}A=\frac{AC}{BC}\Rightarrow \text{ctg}30^0=\frac{AC}{6}\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{AC}{6}\Rightarrow AC=6\sqrt{3}.$$

	SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**
	Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.
5p	**a)** Arătați că legea „$*$” este comutativă.
5p	**b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care are loc egalitatea $x*y=(2-x)(2-y)+a$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
5p	**d)** Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x*x=x$.
5p	**e)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.
5p	**f)** Arătați că $(x+2)*\left(\frac{1}{x}+2\right)=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

Rezolvare:

a) Comutativitatea: $x*y=y*x,\forall x,y\in\mathbf{R}$. Avem

$x*y=xy-2x-2y+6=yx-2y-2x+6=y*x,\forall x,y\in\mathbf{R}$.

b) Asociativitatea: $x*(y*z)=(x*y)*z,\forall x,y,z\in\mathbf{R}$. Avem

$$x*(y*z)=x*(yz-2y-2z+6)=x(yz-2y-2z+6)-2x-2(yz-2y-2z+6)+6=$$
$$=xyz-2xy-2xz+6x-2x-2yz+4y+4z-12+6=xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6=$$
$$=xyz-2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)-6=\mathrm{I}$$
$$(x*y)*z=(xy-2x-2y+6)=(xy-2x-2y+6)z-2(xy-2x-2y+6)-2z+6=$$
$$=xyz-2xz-2yz+6z-2xy+4x+4y-12-2z+6=xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6=$$
$$=xyz-2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)-6=\mathrm{II}$$

I=II $\Rightarrow$asociativitatea.

c) $(2-x)(2-y)+a=4-2y-2x+xy+a=xy-2x-2y+a+4\Rightarrow a+4=6\Rightarrow a=2$.

d) $x*x=x\cdot x-2x-2x+6=x^2-4x+6\Rightarrow x^2-4x+6=x\Rightarrow x^2-5x+6=0$,

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow \Delta=5^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1,\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-5)-1}{2}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2,\ x_2=\frac{-(-5)+1}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

e) Element neutru: $\exists e\in\mathbf{R}$ *astfel încât* $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbf{R}$. Legea de compoziţie este comutativă şi atunci luăm $x*e=x\Rightarrow$

$xe-2x-2e+6=x\Rightarrow xe-2e=3x-6\Rightarrow e(x-2)=3(x-2)\Rightarrow e=3\in\mathbf{R}$.

f) $$(x+2)*\left(\frac{1}{x}+2\right)=(x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right)-2\cdot(x+2)-2\left(\frac{1}{x}+2\right)+6=1\cancel{+2x}+\cancel{\frac{2}{x}}\cancel{+4}\cancel{-2x}-4-\cancel{\frac{2}{x}}\cancel{-4}+6=3.$$

	SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)
	Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&-a\\-a&0&0\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.
5p	**a)** Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A+I_3)=1$.
5p	**b)** Calculaţi $\det\left(A+{}^tA\right)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.
5p	**c)** Pentru $a=1$, determinaţi inversa matricei A.
5p	**d)** Arătaţi că $A^3=a^3\cdot I_3$.
5p	**e)** Pentru $a=1$, verificaţi egalitatea $(A+I_3)\left(A^2-A+I_3\right)=2I_3$.
5p	**f)** Determinaţi valorile numărului real a pentru care $\det\left(A+{}^tA+I_3\right)=1$.

Rezolvare: a) $A+I_3=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&-a\\-a&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&-a\\-a&0&1\end{pmatrix}$,

$$\det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&-a\\-a&0&1\end{vmatrix}=1+a^3\Rightarrow 1+a^3=1\Rightarrow a^3=0\Rightarrow a=0.$$

b) ${}^tA=\begin{pmatrix}0&0&-a\\a&0&0\\0&-a&0\end{pmatrix}\Rightarrow A+{}^tA=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&-a\\-a&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-a\\a&0&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&-a\\a&0&-a\\-a&-a&0\end{pmatrix}$,

$$\det\left(A+{}^tA\right)=\begin{vmatrix}0&a&-a\\a&0&-a\\-a&-a&0\end{vmatrix}=a^3+a^3=2a^3.$$

c) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=1\neq 0\Rightarrow A$ inversabilă, ${}^tA=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&0\\-1&0\end{vmatrix}=0,A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0,A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}=1,A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}=0,A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&0\\0&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}=0,A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=-1,A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}=0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

d) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&-a\\-a&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&-a\\-a&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-a^2\\a^2&0&0\\0&-a^2&0\end{pmatrix}$,

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = a^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^3 \cdot I_3$$

e) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 1^3 \cdot I_3 = I_3$

$$\left(A + I_3\right)\left(A^2 - A + I_3\right) = A^3 - A^2 + A + I_3 A^2 - I_3 A + I_3^2 = I_3 \cancel{-A^2} \cancel{+A} \cancel{+A^2} \cancel{-A} + I_3 = 2I_3 .$$

f) $A +^t A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & -a \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\det\left(A +^t A + I_3\right) = \begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1 & -a \\ -a & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3 + a^3 - a^2 - a^2 - a^2 = 2a^3 - 3a^2 + 1 ,$$

$$2a^3 - 3a^2 + 1 = 1 \Rightarrow 2a^3 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2\left(2a - 3\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \ sau \ 2a - 3 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} .$$