

Examenul de bacalaureat național 2014

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 7

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. TÉTEL

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg a  $z = 1 + 2i + 3i^2$  komplex szám valós részét!
- 5p 2. Határozd meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 1$  és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x - 5$  függvények grafikus képei metszéspontjának koordinátáit!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $3^{x^2-x} = 3^{2x}$  egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg a 0, 1, 2 és 3 számjegyekkel alkotható kétjegyű páros természetes számok számát!
- 5p 5. Az  $xOy$  Descartes-féle koordináta rendszerben adottak az  $\overline{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  és  $\overline{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$  vektorok, ahol  $m$  valós szám. Határozd meg azt az  $m$  valós számot, amelyre  $\overline{AC} = 2\overline{AB}$ .
- 5p 6. Adott az  $ABC$  háromszög, amelyben  $AB = AC = 3$  és  $BC = 3\sqrt{2}$ . Számítsd ki  $\cos C$  értékét!

II. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  valós szám.

- 5p a) Igazold, hogy  $\det(A(0)) = 1$ .
- 5p b) Igazold, hogy  $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$  bármely  $x$  és  $y$  valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $A(x^2 + 2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$ .
2. Adott az  $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$  polinom, ahol  $a$  valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy  $f(2) = 2(a-3)$ .
- 5p b) Határozd meg azt az  $a$  valós számot, amelyre  $f$  osztható  $X^2 - X + 1$ -gyel!
- 5p c)  $a = 3$  esetén oldd meg a valós számok halmazán az  $f(2^x) = 0$  egyenletet!

III. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az  $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}$  függvény.

5p a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x+2)^2}$ ,  $x \in (-2, +\infty)$ .

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének  $x_0 = 0$  abszcisszájú pontjában a grafikus képhez húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy az  $f(x) = 1$  egyenletnek van legalább egy gyöke az  $(1, 2)$  intervallumban!

2. Minden zérótól különböző  $n$  természetes szám esetén adott az  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$  szám.

5p a) Igazold, hogy  $I_1 = 1 - \ln 2$ .

5p b) Igazold, hogy  $I_{n+1} \leq I_n$  bármely zérótól különböző  $n$  természetes szám esetén!

5p c) Igazold, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .