Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ÚLOHA I (30 bodov)

5b **1.** Určte reálnu časť komplexného čísla $z=1+2i+3i^2$.

5b **2.** Určte súradnice bodu v ktorom sa pretínajú grafy funkcií $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5b **3.** Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5b **4.** Určte počet párnych dvojciferných prirodzených čísel, ktoré možno vytvoriť z číslic 0, 1, 2 a 3.

5b **5.** V karteziánskej súradnej sústave xOy sú dané vektory $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ a $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, kde m je reálne číslo. Určte reálne číslo m vediac, že $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5b **6.** Je daný trojuholník ABC, v ktorom $AB=AC=3$ a $BC=3\sqrt{2}$. Určte $\cos C$.

ÚLOHA II (30 bodov)

1. Je daná matica $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, kde x je reálne číslo.

5b **a)** Dokážte, že $\det(A(0))=1$.

5b **b)** Dokážte, že $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pre ľubovoľné reálne čísla x a y.

5b **c)** Určte reálne čísla x vediac, že $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Je daný polynóm $f=X^3-3X^2+aX-2$, kde a je reálne číslo.

5b **a)** Dokážte, že $f(2)=2(a-3)$.

5b **b)** Určte reálne číslo a vediac, že polynóm f je deliteľný s X^2-X+1.

5b **c)** Pre $a=3$, riešte rovnicu $f(2^x)=0$.

ÚLOHA III (30 bodov)

1. Je daná funkcia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5b **a)** Dokážte, že $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5b **b)** Určte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode so súradnicou $x_0=0$, ktorý sa nachádza na grafe funkcie f.

5b **c)** Dokážte, že rovnica $f(x)=1$ má aspoň jedno riešenie v intervale $(1,2)$.

2. Pre každé nenulové prirodzené číslo n je dané číslo $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx$.

5b **a)** Dokážte, že $I_1=1-\ln 2$.

5b **b)** Dokážte, že $I_{n+1}\le I_n$ pre každé nenulové prirodzené číslo n.

5b **c)** Dokážte, že $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.