

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg a $z = 3 + 2(1 - i)$ komplex szám valós részét!
- 5p 2. Igazold, hogy $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$, ha tudjuk, hogy x_1 és x_2 az $x^2 - 3x + 10 = 0$ egyenlet megoldásai!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$ egyenletet!
- 5p 4. Hány háromjegyű, különböző számjegyeket tartalmazó páratlan természetes szám képezhető az $\{1, 2, 3\}$ halmaz elemeiből?
- 5p 5. Határozd meg az a valós szám értékét, amelyre az $y = (a - 1)x + 1$ és $y = 2x - 3$ egyenletű egyenesek párhuzamosak!
- 5p 6. Határozd meg az ABC háromszög köré írt kör sugarát, ha $AB = 3$, $AC = 4$ és $BC = 5$.

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Számítsd ki $\det(A(2))$ értékét!
- 5p b) Határozd meg az x valós szám értékét, amelyre $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, ahol $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Igazold, hogy $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, bármely n zérótól különböző természetes szám esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = 4(x + y - 3) - xy$ asszociatív algebrai műveletet.
- 5p a) Számítsd ki $2 * 4$ értékét!
- 5p b) Igazold, hogy $x * y = 4 - (x - 4)(y - 4)$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Oldd meg a valós számok halmazán az $x * x * x = x$ egyenletet!

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x + 1$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = 1$.
- 5p b) Igazold, hogy $f'(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq 0$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 15}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^{2014} (x + 3)(x + 5) f(x) dx = 2014$.
- 5p b) Igazold, hogy $\int_{-1}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{144}$.
- 5p c) Határozd meg az a , $a > 0$ valós számot, ha tudjuk, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 0$ és $x = a$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\frac{1}{2} \ln \frac{10}{9}$.