

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány harmadik tagját, ha tudjuk, hogy $a_1 = 2$ és $a_2 = 5$.
- 5p 2. Határozd meg az a valós szám értékét, ha tudjuk, hogy az $A(3,5)$ pont rajta van az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a - x$ függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $8^{4-x} = 2^{2x+2}$ egyenletet!
- 5p 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kétjegyű természetes szám számjegyeinek szorzata 0 legyen?
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $M(1,1)$ pont. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az M ponton, és irányítányezője 2.
- 5p 6. Az ABC háromszögben tudjuk, hogy $AB = 5$, $AC = 12$ és $BC = 13$. Igazold, hogy $\sin C = \frac{5}{13}$.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Igazold, hogy $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.
2. Adott az $f = X^3 + 2X^2 + X + m$ polinom, ahol m valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(0) = m$.
- 5p b) $m = 1$ esetén igazold, hogy $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!
- 5p c) Határozd meg az m természetes prímszámot, ha tudjuk, hogy az f polinomnak van egy egész gyöke!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ -ben!

5p c) Igazold, hogy az f függvény deriváltja csökkenő az \mathbb{R} halmazon!

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$.

5p b) Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Határozd meg a nullától különböző n természetes számot úgy, hogy $\int_1^e \frac{1}{x} (f(x))^n dx = \frac{1}{2015}$.