

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 8

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy  $(\sqrt{5} + 1)^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 12$ .
- 5p 2. Számítsd ki az  $f(1)f(2)f(3)f(4)$  szorzatot, ahol  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 3$ .
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$  egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg, hogy hány különböző számjegyű háromjegyű páratlan természetes számot lehet alkotni a 2, 3 és 4 számjegyekkel!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(1,2)$  és  $B(2,3)$  pontok. Határozd meg annak a  $d$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az  $A$  ponton és merőleges az  $AB$  egyenesre!
- 5p 6. Igazold, hogy  $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = 0$ , bármely  $x$  valós szám esetén!

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott a  $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $x$  valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy  $\det(B(0)) = 1$ .
- 5p b) Igazold, hogy  $B(x) + B(y) = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , bármely  $x$  és  $y$  valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $B(x^2 + 1)B(x) = B(x^2 + x + 1)$ .
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3) + 3$  asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy  $(-3) \circ 3 = 3$ .
- 5p b) Határozd meg azokat az  $n$  természetes számokat, amelyekre  $n \circ n = 11$ .
- 5p c) Számítsd ki az  $1 \circ 2 \circ 3 \circ \dots \circ 2015$  kifejezés értékét!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  függvény.
- 5p a) Igazold, hogy  $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ .
- 5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $(1, +\infty)$  intervallumon.
- 5p c) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéről annak a pontnak a koordinátáit, amelyben az  $f$  grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az  $y = -3x$  egyenletű egyenessel!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$  függvény.
- 5p a) Igazold, hogy  $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x) dx = e(e-1)$ .
- 5p b) Határozd meg az  $f$  függvénynek azt az  $F$  primitívjét, melyre  $F(1) = 0$
- 5p c) Minden  $n$  természetes szám esetén tekintsük az  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$  számot. Igazold, hogy  $I_n + (n+1)I_{n-1} = e$ , bármely  $n$ ,  $n \geq 2$  természetes számra!