

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Adottak a $z_1 = 2 + 3i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok. Igazold, hogy $z_1 + z_2$ valós szám.
- 5p 2. Számítsd ki az $(f \circ g)(1)$ értéket, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $4^x - 64 = 0$ egyenletet!
- 5p 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű természetes szám, osztható legyen 7-tel.
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = 4x + 1$ egyenletű d egyenes és az $A(2, 0)$ pont. Határozd meg az A ponton áthaladó d -vel párhuzamos egyenes egyenletét!
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin(\pi - x)\sin x - \cos(\pi - x)\cos x = 1$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

5p a) Igazold, hogy $\det A = 0$

5p b) Igazold, hogy $A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = 3B(x)$, bármely x valós számra!

5p c) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $B(x) \cdot B(x) \cdot B(x) = B(x^2 + x - 2)$.

2. Adott az $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, polinom, ahol m valós szám.

5p a) Igazold, hogy $f(0) = m$.

5p b) Ha $m = -1$, igazold, hogy $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 4$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

5p c) Igazold, hogy az f polinom **nem** minden gyöke valós!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az f függvény grafikonjának az $x = 0$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjének egyenletét.

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^x$ határértéket!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) + 2x) dx = e - 1$

5p b) Határozd meg az f függvénynek azt az F primitívjét, melyre $F(1) = e - 3$.

5p c) A $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ függvény grafikus képét megforgatjuk az Ox tengely körül. Igazold, hogy a keletkezett forgástest térfogata $\frac{\pi}{6}(3e^2 - 19)$.