

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I.FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány második tagját, ha $a_1 = 1$ és az állandó különbség $r = 2$.
- 5p 2. Határozd meg az m valós szám értékét tudva, hogy az $A(m, 0)$ pont rajta van az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldd meg a $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ halmaz tetszőleges eleme osztható legyen 3-mal?
- 5p 5. Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ és $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ vektorok kollineárisak!
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ha $\sin x = \frac{1}{2}$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

II.FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $A(2014) + A(2016) = 2A(2015)$.
- 5p b) Határozd meg az a valós szám értékét úgy, hogy $\det(A(a)) = 0$.
- 5p c) Oldd meg a $\det(A(2) + xA(3)) = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = -xy - x - y - 2$ műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $(-1) * 1 = -1$.
- 5p b) Igazold, hogy $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Oldd meg az $(x+2) * (2x-3) = 5$ egyenletet a valós számok halmazán!

III.FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^4}{x^2 + 1}$ határértéket!
- 5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képéről azon pontok koordinátáit, amelyekben az f függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az Ox tengellyel!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_1^2 x f(x) dx = \frac{7}{2}$.
- 5p b) Igazold, hogy az $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x + 2 \ln x + 2015$ függvény az f -nek egy primitívje!
- 5p c) Igazold, hogy a $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (f(x) - 1) \ln x$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe 1.