

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Adott a $z = 1 + i$ komplex szám. Igazold, hogy $z^2 - 2i = 0$.
- 5p 2. Számítsd ki a $(g \circ f)(3)$ értéket, ahol $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2015$.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz négyelemű részhalmazainak számát!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(0, 4)$ pont. Határozd meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton és párhuzamos az $y = 2x + 7$ egyenletű egyenessel!
- 5p 6. Számítsd ki az MNP háromszög területét tudva, hogy $MN = 12$, $MP = 3$ és $m(\sphericalangle M) = 30^\circ$.

II. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Határozd meg azokat az a valós számokat, amelyekre $\det(A(a)) = 0$.
- 5p c) Igazold, hogy $A(a)A(b) = A(a+b) + abI_2$, bármely a és b valós számra, ahol $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Adott az $f = X^3 - mX + 2$ polinom, ahol m valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(0) = 2$.
- 5p b) Határozd meg az m valós szám értékét úgy, hogy f polinomnak a $g = X^2 + X - 2$ polinommal való osztási maradéka 0 legyen!
- 5p c) Igazold, hogy $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, bármely m valós szám esetén, ahol x_1 , x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADAT

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- 5p b) Igazold, hogy az f függvény csökkenő a $(-\infty, 0]$ intervallumon!
- 5p c) Igazold, hogy $e^x \geq x + 1$, bármely x valós szám esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) + 2x - 5) dx = \frac{1}{3}$.
- 5p b) Számítsd ki az $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ értéket!
- 5p c) Igazold, hogy $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4}$.