

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ÚLOHA I

(30 bodov)

- 5b** 1. Nájdite reálne čísla a i b vediac, že $(a+b)(i+1) = (a-b+1)(i-1)$, kde $i^2 = -1$.
- 5b** 2. Nájdite reálne čísla m , pre ktoré funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$ má minimalnú hodnotu -3 .
- 5b** 3. Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $\log_3 x = \log_x 3$.
- 5b** 4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak náhodne vyberieme jedno číslo z množiny všetkých dvojciferných prirodzených čísel, potom obe číslice toho čísla sú druhé mocniny nejakých prirodzených čísel.
- 5b** 5. V karteziánskej sústave xOy sú dané body $A(-1, a)$, $B(0, -3)$ i $C(1, 1)$, kde a je reálne číslo. Nájdite reálne číslo a vediac, že $AB + BC = AC$.
- 5b** 6. Určte $a \in (0, \pi)$ vediac, že $\left(\sin \frac{\pi}{7} - \cos a\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin a\right)^2 = 2$.

ÚLOHA II

(30 bodov)

1. Je daná matica $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, kde m je reálne číslo.
- 5b** a) Vypočítajte $\det(A(1))$.
- 5b** b) Nájdite reálne hodnoty m , pre ktoré matica $A(m)$ je inverzovateľná.
- 5b** c) Riešte rovnicu $X \cdot A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, kde $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2. Na množine reálnych čísel je definovaná asociatívna binárna operácia $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.
- 5b** a) Ukážte, že $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pre ľubovoľné reálne čísla x a y .
- 5b** b) Vypočítajte $1 * 2 * 3 * \dots * 2016$.
- 5b** c) Nájdite prirodzené čísla a , b i c vediac, že $a < b < c$, $a * b * c = 66$.

ÚLOHA III

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
- 5b** a) Nájdite rovnicu vodorovnej asymptoty do $+\infty$ ku grafu funkcie f .
- 5b** b) Nájdite súradnice bodu, ktorý sa nachádza na grafe funkcie f , v ktorom dotyčnica ku grafu funkcie f je rovnobežná s osou Ox .
- 5b** c) Vypočítajte $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))^n$.

2. Je daná funkcia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5b a) Vypočítajte $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x) dx$.

5b b) Dokážte, že $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

5b c) Dokážte, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^e \frac{f(x)}{x^n} dx = 0$.