Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Bestimme die Differenz der arithmetischen Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn $2a_{10}=a_5+a_6+36$.

5p **2.** Bestimme die Abszissen der Schnittpunkte des Schaubildes der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-1$ mit de Geraden der Gleichung $y=x-1$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_2\left(x^2-1\right)=4$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Ziffern einer aus der Menge der zweistelligen natürlichen Zahlen gewählten Zahl, teilbar ist durch 10.

5p **5.** Im kartesischen Koordinatensystem xOy seien die Punkte $A(1,1)$, $B(1,4)$ und $C(5,1)$. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes des Umkreises des Dreiecks ABC.

5p **6.** Zeige, dass $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\text{ctg}^2 x$, für alle $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $M(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ x & 2x-1 & 1\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Berechne $\det(M(0))$.

5p **b)** Beweise, dass $2M(x)-M(-x)=M(3x)$, für jede reelle Zahl x.

5p **c)** Im kartesischen Koordinatensystem xOy seien die Punkte $O(0,0)$, $A(n,2n-1)$ und $B\left(n^2,2n^2-1\right)$, wo n eine natürliche Zahl ist, $n\geq 2$. Beweise, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OAB eine natürliche Zahl ist.

2. Auf der Menge der natürlichen Zahlen sei die assoziative Verknüpfung $x\circ y=6xy-2x-2y+1$.

5p **a)** Berechne $1\circ\frac{1}{3}$.

5p **b)** Bestimme das neutrale Element der Verknüpfung „$\circ$”.

5p **c)** Berechne $\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f im Punkt des Schaubildes der Funktion f mit der Abszisse $x=0$.

5p **c)** Beweise, dass $-\frac{1}{4}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$, für jede reelle Zahl x.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-2$.

5p **a)** Bestimme die Stammfunktion F der Funktion f, für die $F(1)=0$.

5p **b)** Berechne $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x, wenn $\int_1^x f(t)\,dt=0$.