

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ZADANIE I.

(30 bodov)

- 5b 1. Ukážete, že $(\sqrt{2}-3)^2 + (\sqrt{2}+3)^2 = 22$.
- 5b 2. Vypočítajte súčin $f(-1)f(0)f(1)$, kde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$.
- 5b 3. Na množine reálnych čísel riešte rovnicu $\log_3(x^2 - 6x + 6) = \log_3 1$.
- 5b 4. Určte koľko párných trojčiferných prirodzených čísel utvorených z rôznych číslic je možné vytvoriť s číslicami 5, 7, 8 i 9.
- 5b 5. V karteziánskej sústave súradníc xOy sú dané body $A(-1,0)$ i $B(1,2)$. Určte rovnicu priamky d ktorá prechádza bodom O a je rovnobežná s priamkou AB .
- 5b 6. Ukážete, že $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$, pre hociktoré reálne číslo x .

ZADANIE II.

(30 bodov)

1. Je daná matica $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 + x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde x je reálne číslo.

5b a) Ukážete, že $\det(A(1)) = 1$.

5b b) Dokážete, že $A(x)A(y) = A(x+y)$, pre hociktoré reálne čísla x i y .

5b c) Určte reálne číslo a , $a \neq -1$, vďaka čomu $A\left(\frac{1}{1 \cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdot \dots \cdot A\left(\frac{1}{2016 \cdot 2017}\right) = A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

2. Je daný polynóm $f = X^4 + mX^2 + 2$, kde m je reálne číslo.

5b a) Určte reálne číslo m , vďaka čomu $f(1) = 0$.

5b b) Dokážete, že $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$, pre hociktoré reálne číslo m , kde x_1, x_2, x_3 i x_4 sú korene polynómu f .

5b c) Pre $m = 3$, rozložte polynóm f na ireducibilné činitele v $\mathbb{R}[X]$.

ZADANIE III.

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

5b a) Dokážete, že $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5b b) Určte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v bode s x -ovou súradnicou $x = 0$, ktorý leží na grafe funkcie f .

5b c) Dokážete, že pre hociktoré reálne číslo a , $a \in (-1,1)$, rovnica $f(x) = a$ má jediné riešenie.

2. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x-1)$.

5b a) Ukážete, že $\int_0^2 f(x)e^{-x} dx = 0$.

- 5b** | **b)** Dokážte, že rovinná plocha ohraničená grafom funkcie f , osou Ox a priamkami, ktorých rovnice sú $x = 1$ a $x = 2$ má obsah rovný s e .
- 5b** | **c)** Dokážte, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^1 (f(x) + e^x) dx = 0$.