

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ÚLOHA I

(30 bodov)

- 5b 1. Nájdiťe reálne číslo x vediac, že čísla 7 , $3x$ a $x^2 + 2$ sú v tomto poradí, za sebou idúcimi členmi jednej aritmetickej postupnosti.
- 5b 2. Nájdiťe reálne číslo m vediac, že parabola asociovaná k funkcii $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ dotýka os Ox .
- 5b 3. Riešte v množine reálnych čísel rovnicu $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x$.
- 5b 4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak náhodne vyberieme jednu z podmnožín množiny $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, potom táto podmnožina bude mať najviac dva prvky.
- 5b 5. V karteziánskej súradnej sústave xOy sú dane body $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ a $C(1, 4)$. Nájdiťe rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom B a je rovnobežná s ťažnicou, ktorá vychádza z bodu A v trojuholníku ABC .
- 5b 6. Vypočítajte polomer opisanej kružnice trojuholníka ABC , v ktorom $A = \frac{3\pi}{4}$ a $BC = \sqrt{2}$.

ÚLOHA II

(30 bodov)

1. Je daná matica $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, kde x je reálne číslo.
- 5b a) Dokážte, že $\det(A(10)) = 1024$.
- 5b b) Nájdiťe reálne čísla x vediac, že $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.
- 5b c) Vediac, že $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2016)$, dokážte, že n je prirodzené číslo deliteľné číslom 2017.
2. Je daný polynóm $f = X^3 - 5X + a$, kde a je reálne číslo.
- 5b a) Ukážte, že $f(0) = a$.
- 5b b) Určte reálne číslo a pre ktoré $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$, kde x_1, x_2 a x_3 sú korene polynómu f .
- 5b c) Dokážte, že polynóm f má najviac jeden koreň v množine celých čísel.

ÚLOHA III

(30 bodov)

1. Je daná funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.
- 5b a) Ukážte, že $f'(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5b b) Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5b c) Dokážte, že $f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$.

2. Pre každé nenulové prirodzené číslo n , je dané číslo $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

5b a) Ukážete, že $I_1 = \frac{2}{3}$.

5b b) Dokážete, že $I_{n+1} \leq I_n$, pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo n .

5b c) Dokážete, že $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pre ľubovoľné nenulové prirodzené číslo n .