Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Bestimme das dritte Glied der arithmetischen Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn $a_1 = 2016$ und die Differenz $r = 2$.

5p **2.** Bestimme die reelle Zahl m, wenn der Punkt $A(1,2)$ zu dem Schaubild der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x+m$ gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl aus der Menge $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$ die Ziffer 4 enthält.

5p **5.** Im kartesischen Koordinatensystem xOy seien die Punkte $A(1,2)$ und $B(4,5)$. Bestimme die Gleichung der Geraden AB.

5p **6.** Wenn $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ und $\sin x = \frac{4}{5}$, zeige, dass $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Es seien die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases} x+ay+z=1 \\ ax+y-z=-1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Beweise, dass die Matrix $A(a)$, für jede reelle Zahl a, $a\neq -1$ und $a\neq 1$, umkehrbar ist.

5p **c)** Bestimme die ganzen Zahlen a, für die das System die einzige Lösung (x_0, y_0, z_0) hat und x_0, y_0 und z_0 ganze Zahlen sind.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die assoziative Verknüpfung $x\circ y = 3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Zeige, dass $x\circ y = 3(x+1)(y+1)-1$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Wenn $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x+3$, beweise, dass $f(x\circ y) = f(x)f(y)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen a, für die $\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{2016 \text{ Mal } a} = 3^{2015}-1$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Beweise, dass die Funktion f auf $(1,+\infty)$ konvex ist.

5p **c)** Beweise, dass $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \frac{5}{2}$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a, $a>1$, wenn das Volumen des Körpers, der durch Drehung des Schaubildes der Funktion $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ um die Ox-Achse entsteht, gleich $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$ ist.