

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány negyedik tagját, tudván, hogy $a_1 = 1$ és $a_2 = 4$.
- 5p** 2. Határozd meg az a valós számot úgy, hogy az $A(1, a)$ pont rajta legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ függvény grafikus képén!
- 5p** 3. Oldd meg a $9^{x-2} = 3^{2-x}$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p** 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű természetes szám legyen kisebb vagy egyenlő, mint 30.
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(0, 3)$ pont. Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton, és irányításegyezője 1.
- 5p** 6. Az ABC háromszögben ismerjük $AB = 10$, $AC = 10$ és $BC = 12$. Igazold, hogy $\sin B = \frac{4}{5}$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol m

valós szám.

- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 2$.
- 5p** b) Igazold, hogy az $A(m)$ mátrix invertálható bármely m , $m \neq -1$ és $m \neq 2$ valós számok esetén!
- 5p** c) $m = 2$ esetén, határozd meg az egyenletrendszer azon (x_0, y_0, z_0) megoldását, amelyre $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$ asszociatív műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy $x * y = -2(x - 5)(y - 5) + 5$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p** b) Igazold, hogy $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5$.
- 5p** c) Határozd meg azokat az m és n természetes számokat, amelyekre $m * n = 27$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p c) Igazold, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek van két különböző valós megoldása!

2. Adott az $f: (4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_5^{10} (x-4) f(x) dx = \ln 2$.

5p b) Határozd meg a $g: [5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x f(x)$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából kapott test térfogatát!

5p c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \int_n^{n+1} f(x) dx \right) = 1$.