Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die komplexe Zahl $z=1-i$. Zeige, dass $z^2=-2i$.

5p **2.** Berechne $(g\circ f)(0)$, wo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl aus der Menge $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, ein vollständiges Quadrat ist.

5p **5.** Gegeben ist in dem kartesischen Koordinatemsystem xOy der Punkt $A(0,1)$. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt A geht und parallel zu der Geraden mit der Gleichung $y=3x-2016$ ist.

5p **6.** Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn $AB=6$, $AC=4$ und $A=\frac{\pi}{6}$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, wo m eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Beweise, dass $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, für jede reelle Zahl m.

5p **c)** Beweise, dass die Matrix $A(m)$ umkehrbar ist, für jede reelle Zahl m.

2. Gegeben ist die Verknüpfung $x*y=-3xy+9x+9y-24$, die in der Menge der reellen Zahlen definiert ist .

5p **a)** Zeige, dass $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Beweise, dass die Verknüpfung „$*$” assoziativ ist.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl x, so dass $(x*x)*x=12$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der vertikalen Asymptote des Schaubildes der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass $f(x)\geq 1$, für alle $x\in(0,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Zeige, dass der Inhalt der Fläche begrenzt von dem Schaubild der Funktion f, der Ox Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=0$ und $x=3$ gleich $\ln 7$ ist.

5p **c)** Beweise, dass $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.