

Examenul de bacalaureat național 2016

**Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$**

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány első tagját, ha $b_5 = 48$ és $b_8 = 384$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 6$ függvény. Határozd meg az f függvény grafikus képének az Ox tengellyel való metszéspontjai közötti távolságot!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $32^x = 16 \cdot 2^x$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott n elemére teljesüljön az $n^2 - 5n + 6 = 0$ egyenlőség!
- 5p 5. Határozd meg az a valós számot tudva, hogy az $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ és $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ vektorok kollineárisak.
- 5p 6. Igazold, hogy $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - 4\sin 2x = 5$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x és y valós számok.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(2A) = -28$.
- 5p b) Határozd meg az x és y valós számokat, ha $A + 2B = I_2$, ahol $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Ha $AB = BA$ igazold, hogy $\det B \leq 0$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$ műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $(-1) \circ 1 = -1$.
- 5p b) Oldd meg a valós számok halmazán az $x \circ x = x$ egyenletet!
- 5p c) Határozd meg azokat az egész számokból alkotott (a, b) számpárokat, amelyekre $a \circ b = 8$.

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez húzott vízszintes aszimptota egyenletét a $-\infty$ -ben!
- 5p c) Igazold, hogy $f'(x) \geq -1$, bármely x valós szám esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = 3$.
- 5p b) Igazold, hogy az $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2016$ függvény egy primitív függvénye az f -nek!
- 5p c) Igazold, hogy a $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogata kisebb mint 14π .