Examenul de bacalaureat naţional 2016
Matematică M_mate-info

SUBIECTUL I

1. Determinați numărul real x, știind că numerele $7, 3x$ și x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Rezolvare. Media aritmetică:
$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \Rightarrow 3x = \frac{7+x^2+2}{2} \Rightarrow 6x = x^2+9 \Rightarrow x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3.$

2. Determinaţi numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.

Rezolvare. Parabola este tangentei axei Ox în vârful parabolei. Vârful parabolei are coordonatele $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Vom avea: $\frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$
$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot m = 4-4m = 4(1-m) \Rightarrow 1-m = 0 \Rightarrow m = 1.$

3. Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x$.

Rezolvare. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x \Rightarrow 2^{-4x+9} = 2^{5x} \Rightarrow -4x+9 = 5x \Rightarrow -9x = -9 \Rightarrow x = 1.$

4. Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

Rezolvare. Submulțimile mulțimii A sunt
$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64.$
Submulțímile cu cel mult două elemente sunt
$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = 1+6+\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 7+\frac{5\cdot 6}{2} = 7+15 = 22.$
Probabilitatea $p = \frac{nr.\ cazuri.\ favorabile}{nr.\ caz.\ posibile} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}.$

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0), B(1,0)$ și $C(1,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

Rezolvare. Punctul D este mijlocul $[BC]$,
$x_D = \frac{x_B+x_C}{2} \Rightarrow x_D = \frac{1+1}{2} = 1, y_D = \frac{y_B+y_C}{2} \Rightarrow y_D = \frac{0+4}{2} = 2,$
atunci obţinem $D(1,2)$. Panta dreptei AD este $m_{AD} = \frac{y_D-y_A}{x_D-x_A} \Rightarrow m_{AD} = \frac{2-0}{1+1} = 1$ și panta dreptei care trece prin B și este paralelă cu AD este $m = 1$.
Ecuaţia dreptei determinate de un punct și o pantă este:
$y - y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow y - 0 = 1\cdot(x-1) \Rightarrow y = x-1.$

6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A = \frac{3\pi}{4}$ și $BC = \sqrt{2}$.

Rezolvare. Teorema sinusurilor $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin B} = 2R.$
Se obţine $\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $det(A(10)) = 1024$.

Rezolvare. $det(A(10)) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{vmatrix} = 2^{10} = 1024.$

b) Determinați numerele reale x, știind că $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.

Rezolvare. $A(x) \cdot A(2x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2x} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2x+x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \cdot 2^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{3x} \end{pmatrix} = A(3x).$

$A(x^2+2) = A(3x) \Rightarrow x^2 + 2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

c) Știind că $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \ldots \cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.

Rezolvare. $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \cdot 2^y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y).$

$A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \ldots \cdot A(2016) = A(1+2+3+\ldots+2016) = A\left(\frac{2016 \cdot (2016+1)}{2}\right) =$

$= A(2017 \cdot 1008) \Rightarrow n = 2017 \cdot 2018$ este un număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X + a$, unde a este număr real.

a) Arătați că $f(0) = a$.

Rezolvare. $f(0) = 0^3 - 5 \cdot 0 + a = a$

b) Determinați numărul real a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Rezolvare. Relațile lui Viete:
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5$
$f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1^3 - 5x_1 + a = 0$
$f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2^3 - 5x_2 + a = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5(x_1 + x_2 + x_3) + 3a = 0 \Rightarrow$
$f(x_1) = 0 \Rightarrow x_3^3 - 5x_3 + a = 0$
$\Rightarrow 2016 - 4a - 5 \cdot 0 + 3a = 0 \Rightarrow -a = -2016 \Rightarrow a = 2016.$

c) Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

Rezolvare. Presupunem că f are cel puțin două rădăcini întregi x_1 și x_2 ; cum $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{Z}$.
Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0 - 2 \cdot (-5) = 10.$
Putem să luăm $x_1^2 = 1, x_2^2 = 9, x_3^2 = 0$ deoarece sunt numere întregi. În acest caz pentru $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 3, x_3 = 0$ nu verifică relația $x_1 + x_2 + x_3 = 0.$
Presupunerea că f are cel puțin două rădăcini întregi este greșită. Atunci f are cel mult o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1.$

a) Arătaţi că $f'(x) = e^x - x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. $f'(x) = (e^x)' - \frac{1}{2}(x^2)' - x' - 1' = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 - 0 = e^x - x - 1.$

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}.$

Rezolvare. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x - 1}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x - x - 1)'}{\left(e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1.$

c) Demonstraţi că $f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2}).$

Rezolvare. Determinăm monotonia funcţiei. Calculăm derivata a doua:
$f''(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1.$
$f''(x) > 0$ pentru orice $x > 0$, atunci f' este funcţie strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ și cum $f'(0) = 0$, obținem $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.
Atunci $0 < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2}).$

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

a) Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

Rezolvare. $I_1 = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}.$

b) Demonstrați că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Rezolvare.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1}dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 (1-x^2)^n (1-x^2-1)dx = -\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx.$$

Pentru orice număr natural nenul n și $x \in [0,1]$ avem $0 \le x^2 \le 1$ și $(1-x^2)^n \ge 0$, deci $I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx \le 0$, atunci $I_{n+1} \le I_n$.

c) Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Rezolvare. Calculăm prin părți integrala

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1}dx = \int_0^1 x'(1-x^2)^{n+1}dx = x(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 x(n+1)(1-x^2)^n(-2x)dx =$$

$$= -2(n+1)\int_0^1 (-x^2)(1-x^2)^n dx = -2(n+1)\int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^n dx =$$

$$= -2(n+1)\left(\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^n dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx\right) =$$

$$= -2(n+1)\left(\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx\right) = -2(n+1)(I_{n+1} - I_n).$$

Atunci

$$I_{n+1} = -2(n+1)(I_{n+1} - I_n) \Rightarrow I_{n+1} + 2(n+1)I_n = 2(n+1)I_n \Rightarrow (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.$$