Examenul de bacalaureat național 2016
Matematică *M_st-nat*

SUBIECTUL I

1. Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.

Rezolvare: Din formula termenului general al progresiei geometrice $b_n = b_1 \cdot q^n$ se obține:

$$\begin{cases} b_5 = b_1 \cdot q^4 \Rightarrow b_1 \cdot q^4 = 48 \\ b_8 = b_1 \cdot q^7 \Rightarrow b_1 \cdot q^7 = 384 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cancel{b_1}^{1} \cdot \cancel{q^4}^{1}}{{}_{1}\cancel{b_1} \cdot \cancel{q^7}^{3}} = \frac{48}{384} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

Din $b_1 \cdot q^4 = 48 \Rightarrow b_1 \cdot 2^4 = 48 \Rightarrow b_1 \cdot 16 = 48 \,|:16 \Rightarrow b_1 = 3$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

Rezolvare: Punctele de intersecție ale graficului unei funcții cu axa Ox sunt soluțiile ecuației $f(x)=0$.

Soluțiie ecuației sunt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ecuația

$x^2 - 7x + 6 = 0$, $a = 1$, $b = -7$, $c = 6$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 49 - 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$

$$x_1 = \frac{-(-7)-5}{2\cdot 1} = \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1,\; x_2 = \frac{-(-7)+5}{2\cdot 1} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Distanța dintre punctele de intersecție ale graficului cu axa Ox este $d = |x_2 - x_1| \Rightarrow d = |6-1| = 5$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x = 16 \cdot 2^x$.

Rezolvare: $32^x = 16\cdot 2^x \Leftrightarrow \left(2^5\right)^x = 2^4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{4+x} \Rightarrow 5x = 4 + x \Rightarrow 5x - x = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 5n + 6 = 0$.

Rezolvare: Verificăm pentru fiecare element al mulțimii:

$n = 1 \Rightarrow 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$; $\quad n = 2 \Rightarrow 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$;

$n = 3 \Rightarrow 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$; $\quad n = 4 \Rightarrow 4^2 - 5\cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 \neq 0$;

$n = 5 \Rightarrow 5^2 - 5\cdot 5 + 6 = 25 - 25 + 6 = 6 \neq 0$.

Sunt 2 cazuri favorabile din totalul de 5 posibile. Probabilitatea este

$$p = \frac{nr.\ cazurilor\ favorabile}{nr.\ cazurilor\ posibile} \Rightarrow p = \frac{2}{5}.$$

5. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

Rezolvare: Doi vectori $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ și $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ sunt coliniari dacă $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$. Deci

$$\frac{a+1}{6} = \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow 2(a+1) = 6(a-1) \Leftrightarrow 2a + 2 = 6a - 6 \Leftrightarrow 2a - 6a = -2 - 6 \Leftrightarrow -4a = -8 \,|:4 \Rightarrow a = 2.$$

6. Arătați că $\left(2\sin x+\ \cos x\right)^2+\ \left(\sin x+\ 2\cos x\right)^2-\ 4\sin 2x=\ 5$, pentru orice număr real x .

Rezolvare:

$$\left(2\sin x+\ \cos x\right)^2+\ \left(\sin x+\ 2\cos x\right)^2-\ 4\sin 2x\overset{\sin 2x=2\sin x\cos x}{=}4\sin^2 x+\cancel{4\sin x\cos x}+\cos^2 x+$$

$$+\sin^2 x+\cancel{4\sin x\cos x}+\cos^2 x-4\cdot 2\sin x\cos x=5\sin^2 x+5\cos^2 x=5\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\overset{\sin^2 x+\cos^2 x=1}{=}5\cdot 1=5$$

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

a) Arătați că $\det(2A)=-28$.

Rezolvare: $\det(2A)=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 8=4-32=-28$.

b) Determinați numerele reale x și y , știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Rezolvare: $A+2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2x\\ 2y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2+2x\\ 4+2y & 1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2+2x\\ 4+2y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+2x=0\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow x=-1\\ 4+2y=0\Rightarrow 2y=-4\Rightarrow y=-2\end{cases}.$$

c) Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\le 0$.

Rezolvare: $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot y & 1\cdot x+2\cdot 0\\ 4\cdot 0+1\cdot y & 4\cdot x+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y & x\\ y & 4x\end{pmatrix}$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+x\cdot 4 & 0\cdot 2+x\cdot 1\\ y\cdot 1+0\cdot 4 & y\cdot 2+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & x\\ y & 2y\end{pmatrix}.$$

$$AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2y & x\\ y & 4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & x\\ y & 2y\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2y=4x\Rightarrow y=2x$$

Atunci $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ 2x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(B)=\begin{vmatrix}0 & x\\ 2x & 0\end{vmatrix}=0-x\cdot 2x=-2x^2\le 0,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

a) Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

Rezolvare: $(-1)\circ 1=3\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)+3\cdot 1+2=-3-3+3+2-1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

Rezolvare: $x\circ x=3\cdot x\cdot x+3\cdot x+3\cdot x+2=3x^2+6x+2$.

$3x^2+6x+2=x\Rightarrow 3x^2+5x+2=0,\ a=3,\ b=5,\ c=2,\ \Delta=5^2-4\cdot 3\cdot 2=25-24$.

$$x_1=\frac{-5-1}{2\cdot 3}=\frac{-6}{6}=-1,\ x_2=\frac{-5+1}{2\cdot 3}=\frac{-4^{(2}}{6}=-\frac{2}{3}.$$

c) Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a\circ b=8$.

Rezolvare: $a\circ b=3\cdot a\cdot b+3\cdot a+3\cdot b+2=3ab+3a+3b+2$.

$3ab+3a+3b+2=8\,|+1\Rightarrow 3ab+3a+3b+3=9\,|:3\Rightarrow ab+a+b+1=3\Rightarrow a(b+1)+(b+1)=3$

$$(a+1)(b+1)=3 \Rightarrow \begin{cases} a+1=3,\ b+1=1 \Rightarrow a=2, b=0 \Rightarrow (2,0) \\ a+1=1, b+1=3 \Rightarrow a=0, b=2 \Rightarrow (0,2) \\ a+1=-3, b+1=-1 \Rightarrow a=-4, b=-2 \Rightarrow (-4,-2) \\ a+1=-1, b+1=-3 \Rightarrow a=-2, b=-4 \Rightarrow (-2,-4) \end{cases}.$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = (x-2)\,e^x$.

a) Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Rezolvare: $f'(x)=(x-2)'\cdot e^x+(x-2)(e^x)'=(1-0)\cdot e^x+(x-2)\cdot e^x=e^x(1+x-2)=(x-1)\cdot e^x$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

Rezolvare: Ecuația asimptotei orizontale $y=l$, unde $l=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Calculăm limita funcției spre $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\stackrel{L'H}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-1)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0$. Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției.

c) Demonstrați că $f'(x)\geq -1$, pentru orice număr real x .

Rezolvare: Utilizăm monotonia funcției. Calculăm derivata a doua a funcției:

$f''(x)=[(x-1)e^x]'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x=xe^x$.

$f''(x)=0\Rightarrow xe^x=0\Rightarrow x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$	-	- - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + +	
$f'(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Pe intervalul $(-\infty,0)$, $f''(x)<0\Rightarrow f'(x)$ este descrescătoare, iar pe intervalul $(0,+\infty)$, $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ este crescătoare. Punctul $x=0$ este punct de minim pentru funcția derivată. Atunci $f'(x)\geq f'(0)\Rightarrow f'(x)\geq -1$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.

Rezolvare:

$$\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{2x^{\cancel{2}^1}}{\cancel{x}}+\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x}}\right)dx=\int_1^2 2xdx=\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_1^2=2^2-1^2=4-1=3.$$

b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcției f.

Rezolvare: $F'(x)=(x^2+\ln x+2016)'\stackrel{x)}{=}2x+\frac{1}{x}+0=\frac{2x^2+1}{x}=f(x)$, pentru $\forall x\in\mathbf{R}$, deci F este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π .

Rezolvare: $Vol\left(C_f\right)=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)dx$. Volumul corpului determinat de rotația graficului funcției g este:

$$Vol\left(C_g\right)=\pi\int_2^2 g^2\left(x\right)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2 dx=\pi\int_1^2\frac{4x^4+4x^2+1}{x^2}dx=\pi\int_1^2\left(4x^2+4+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\pi\left(4\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\left(4\cdot\frac{2^3}{3}+4\cdot 2-\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1^3}{3}-4\cdot 1+\frac{1}{1}\right)\pi=\left(\frac{32}{3}+8-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-4+1\right)\pi=$$

$$=\left({}^{2)}\frac{28}{3}-{}^{3)}\frac{1}{2}+{}^{6)}\,5\right)\pi=\frac{56-3+30}{6}\pi=\frac{83}{6}\pi<\frac{84}{6}\pi=14\pi.$$