Examenul de bacalaureat naţional 2016
Matematică *M_tehnologic*

Subiectul I.

1. Arătați că: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

Rezolvare: $\left({}^{2)}1-\frac{1}{2}\right)\left({}^{3)}1-\frac{1}{3}\right)\left({}^{4)}1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{3-1}{3}\cdot\frac{4-1}{4}=\frac{1}{{}_1\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}^1}{{}_1\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}^1}{4}=\frac{1}{4}$.

2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox .

Rezolvare: Abscisele punctlor de intersecție a graficului cu axa Ox sunt soluțiile ecuației $f(x)=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0,\ a=1, b=-3, c=2, \Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1, \sqrt{\Delta}=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x_1=\frac{-(-3)-1}{2\cdot1}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1,\ x_2=\frac{-(-3)+1}{2\cdot1}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x-1)=2$.

Rezolvare: Condiții: $2x-1>0\Rightarrow 2x>1|:2\Rightarrow x>\frac{1}{2}\Rightarrow D=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Pentru rezolvare scriem ecuația

$\log_5(2x-1)=\log_5 5^2\Rightarrow 2x-1=25\Rightarrow 2x=26|:2\Rightarrow x=13\in D$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizor al lui 1000 .

Rezolvare: Divizorii numărului 1000 sunt 10,20,40,50⇒4 cazuri favorabile din totalul de 9 posibile. Probabilitatea $p=\frac{numarul\ cazurilor\ \ favorabile}{numarul\ cazurilorfavorabile}=\frac{4}{9}$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,3)$ si $B(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului AOB .

Rezolvare: Perimetrul triunghiului este suma lungimilor laturilor. Cu formula distanței calculăm lungimile laturilor: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$BO=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4^2}=\sqrt{16}=4$

$AO=\sqrt{(0-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$

$P_{\Delta AOB}=AB+AO+BO=5+4+3=12$.

6. Arătați că $\sin x=\frac{3}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$.

Rezolvare: Din formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \forall x\in\Re$, avem

$\sin^2 x+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1\Rightarrow \sin^2 x={}^{25)}1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{5}\Rightarrow \sin x=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},(cadranul\ I)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că det A=0 .

Rezolvare : Determinantul unei matrice pătratice de ordinul doi este:

$d=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Avem $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot 0-1\cdot 0=0$.

b) Verificați dacă $A\cdot(A+I_2)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Rezolvare : $A+I_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 1+0\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$A\cdot(A+I_2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 0+1\cdot 0 & -1\cdot 1+1\cdot 1\\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$.

c) Determinați numerele reale m pentru care $det(B)=0$, unde $B=A\cdot A+mI_2$.

Rezolvare : $A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0 & (-1)\cdot 1+1\cdot 0\\ 0\cdot(-1)+0\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+m & -1\\ 0 & m\end{pmatrix}$.

$\det(B)=\begin{vmatrix}1+m & -1\\ 0 & m\end{vmatrix}=(1+m)\cdot m-0\cdot(-1)=(1+m)\cdot m$,

$\det(B)=0\Rightarrow(1+m)\cdot m=0\Rightarrow\begin{cases}1+m=0\Rightarrow m=-1\\ m=0\end{cases}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+4X+4$.

a) Arătați că $f(-1)=0$.

Rezolvare : $f(-1)=(-1)^3+(-1)^2+4\cdot(-1)+4=-1+1-4+4=0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X+2 .

Rezolvare :

$(X^3+X^2+4X+4):(X^2+3X+2)=X-2=cât$

$\underline{-X^3-3X^2-2X}$

$-2X^2+2X+4$

$\underline{+2X^2+6X+4}$

$8X+8=rest.$

c) Demonstrați că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=-\frac{3}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Rezolvare :Relațiile lui Viete pentru $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$ sunt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

. Pentru polinomul dat avem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{1} = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{4}{1} = 4 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{4}{1} = -4 \end{cases}.$$

Avem

$$^{x_2x_3)}\frac{1}{x_1} + {}^{x_1x_3)}\frac{1}{x_2} + {}^{x_1x_2)}\frac{1}{x_3} + {}^{x_3)}\frac{1}{x_1x_2} + {}^{x_1)}\frac{1}{x_2x_3} + {}^{x_2)}\frac{1}{x_3x_1} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{4-1}{-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

Subiectul al III-lea

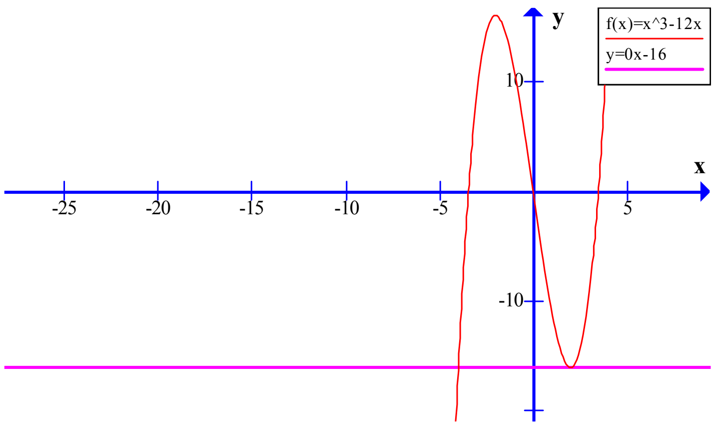
1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: $f'(x) = (x^3)' - 12x' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcţiei f.

Rezolvare: Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(x_0,y_0)$ este $t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, unde $y_0 = f(x_0)$.



Atunci

$x_0 = 2$

$f(2) = 2^3 - 12\cdot 2 = 8 - 24 = -16$ şi

$f'(2) = 3\cdot 2^2 - 12 = 12 - 12 = 0$.

Ecuația tangentei $y - (-16) = 0\cdot(x-2) \Rightarrow y + 16 = 0 \Rightarrow y = -16$.

c) Arătaţi că $-16 \le f(x) \le 16$, pentru orice $x \in [-2,2]$.

Rezolvare: Folosim monotonia funcției

$f'(x) = 3(x^2-4)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + +		0	- - - - - -	0	+ + + + + + +	
$f(x)$	↗			↘		↗	

Pe intervalul [-2,2], $f'(x) \le 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare $\Rightarrow f(2) \le f(x) \le f(-2) \Rightarrow -16 \le f(x) \le 16$.

2. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2 - 1\right)dx = 1$.

Rezolvare:

$$\int_0^1 \left(f(x)-3x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(5x^4 \cancel{+3x^2} \cancel{+1} \cancel{-3x^2} \cancel{-1}\right)dx=\int_0^1 5x^4dx=5\left.\frac{x^{4+1}}{4+1}\right|_0^1=$$

$$=\cancel{5}^1\left.\frac{x^5}{{}_1\cancel{5}}\right|_0^1=1^5-0^5=1.$$

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

Rezolvare:

$$A=\int_1^2\left|f(x)\right|dx\overset{f(x)>0}{=}\int_1^2\left(5x^4+3x^2+1\right)dx=\left.\left(\cancel{5}\frac{x^5}{\cancel{5}}+\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}+x\right)\right|_1^2=$$

$$=2^5+2^3+2-\left(1^5+1^5+1\right)=32+8+2-3=39.$$

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Primitivele funcției f sunt funcțiile F: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, pentru care $F'(x)=f(x)$, $\forall\in\mathbb{R}$. Dar $F(x)=5x^4+3x^2+1>0$, $x\in\mathbb{R}$, (puterile lui x sunt pare), deci F este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.