Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, wobei $i^2=-1$.

5p **2.** Seien x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Zeige, dass $(x_1-x_2)^2=1$, für jede reelle Zahl m.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Bestimme wie viele natürliche dreistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern nur mithilfe der geraden Ziffern gebildet werden können.

5p **5.** Seien das Dreieck ABC und die Punkte M, N und P, die Mitten der Seiten AB, BC, bzw. AC. Beweise, dass $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Bestimme die reellen Zahlen x, falls $\sin 2x=\cos x$ und $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+3z=2\\ x+3y+az=2\end{cases}$, wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, für alle reellen Zahlen a.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen m, für die $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Bestimme die ganzen Zahlen a, für die das System eine einzige Lösung (x_0,y_0,z_0) hat, und x_0, y_0 und z_0 ganze Zahlen sind.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen wird die Verknüpfung $x*y=-5xy+10x+10y-18$ definiert.

5p **a)** Zeige, dass $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Betimme die natürlichen Zahlen n, falls $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Zeige: wenn $a*a=b$ und $b*b=a$, dann $a=b=2$ oder $a=b=\frac{9}{5}$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f.

5p **b)** Zeige, dass $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Beweise, dass die Gleichung $f(x)=a$ für jede reelle Zahl a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, genau zwei reelle verschiedene Lösungen hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. Für jede natürliche von Null verschiedene Zahl n, sei die Zahl $I_n=\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Zeige, dass $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Beweise, dass $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, für jede natürliche von Null verschiedene Zahl n.

5p **c)** Beweise, dass $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, für jede natürliche Zahl n, $n\ge 2$.