

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy  $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{6}{5}$ , ahol  $i^2 = -1$ .
- 5p 2. Az  $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$  egyenlet megoldásai  $x_1$  és  $x_2$ . Igazold, hogy  $(x_1 - x_2)^2 = 1$ , bármely  $m$  valós szám esetén!
- 5p 3. Oldd meg a  $\sqrt{x-3} = 5-x$  egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Határozd meg hány háromjegyű, különböző számjegyekből álló természetes szám képezhető csak páros számjegyekkel!
- 5p 5. Az  $ABC$  háromszögben az  $M$ ,  $N$  és  $P$  pontok az  $AB$ ,  $BC$ , illetve az  $AC$  oldalak felezőpontjai. Igazold, hogy  $\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{BP}$ .
- 5p 6. Határozd meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $\sin 2x = \cos x$  és  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$  mátrix és az  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ x + 3y + az = 2 \end{cases}$  egyenletrendszer, ahol  $a$  valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy  $\det(A(a)) = (a+1)(a-3)$ , bármely  $a$  valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg azokat az  $m$  valós számokat, amelyekre  $A(m)A(2-m) = A(2-m)A(m)$ .
- 5p c) Határozd meg azokat az  $a$  egész számokat, amelyekre az egyenletrendszernek egyetlen  $(x_0, y_0, z_0)$  megoldása van és  $x_0, y_0, z_0$  egész számok!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$  műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy  $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$ , bármely  $x$  és  $y$  valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg az  $n$  természetes számokat, ha  $(n * n) * n = n$ .
- 5p c) Ha  $a * a = b$  és  $b * b = a$ , igazold, hogy  $a = b = 2$  vagy  $a = b = \frac{9}{5}$ .

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$  függvény.
- 5p a) Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait!
- 5p b) Igazold, hogy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \frac{1}{e^2}$ .
- 5p c) Igazold, hogy bármely  $a$ ,  $a \in (-\sqrt{2}, -1)$  valós szám esetén az  $f(x) = a$  egyenletnek pontosan két különböző valós megoldása van!

2. Adott az  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  függvény és minden  $n$  zérótól különböző természetes szám esetén értelmezzük az  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$  számot.

5p a) Igazold, hogy  $\int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{2} - 1)$ .

5p b) Igazold, hogy  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ , bármely  $n$  zérótól különböző természetes szám esetén!

5p c) Igazold, hogy  $(2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$ , bármely  $n$ ,  $n \geq 2$  természetes szám esetén!