Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die komplexe Zahl $z=2+i$. Zeige, dass $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, wo $\overline{z}$ die konjugierte Zahl von z ist.

5p **2.** Bestimme die reelle Zahl m, wenn der Punkt $A(1,m)$ zum Grafen der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$ gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl streng kleiner ist als ihre Einerziffer.

5p **5.** Im kartesischen Bezugssystem xOy seien die Punkte $A(3,1)$, $B(3,3)$ und $C(0,2)$. Berechne die Länge der Seitenhalbierenden aus C des Dreiecks ABC.

5p **6.** Zeige, dass $\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, für alle $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+az=0\\ -2x-y+3z=0\end{cases}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(9)\right)=0$.

5p **b)** Bestimme die reellen Werte von a, für die das Gleichungssystem eine einzige Lösung hat.

5p **c)** Beweise: wenn das Gleichungssystem die Lösung (x_0,y_0,z_0) hat, wo x_0, y_0 und z_0 reelle von Null verschiedene Zahlen sind, dann $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

5p **a)** Zeige, dass $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen x, wenn $x\circ x=x$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a, wenn $2017^a\circ(-6)=1$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote des Grafen der Funktion f gegen $+\infty$.

5p **c)** Beweise, dass $x\ln x>x-1$, für alle $x\in(1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 x f(x)dx = \frac{7}{4}$.

5p **c)** Bestimme die natürliche, von Null verschiedene Zahl n, für die der Flächeninhalt der Menge begrenzt von dem Grafen der Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, der Ox- Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=0$ und $x=n$ gleich n^2-n+1 ist.