

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Adottak a $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 3 - 2i$ komplex számok. Igazold, hogy a $z_1 + z_2$ egy valós szám!
- 5p 2. Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy az $M(2, m)$ pont az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ függvény grafikus képének egy pontja!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $3^{3x-5} = 3^{-2}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ halmazból egy véletlenszerűen kiválasztott szám 5 többszöröse legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,5)$, $B(1,3)$ és $C(m,1)$ pontok, ahol m egy valós szám. Határozd meg az m valós számot tudva azt, hogy a C pont rajta van az AB egyenesen!
- 5p 6. Adott az $E(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin x$, ahol x valós szám. Igazold, hogy $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Határozd meg az x valós számot, amelyre $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
- 5p c) Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(n, n+1)$, $N(2, n)$ és $P(3, 0)$ pontok. Határozd meg az n természetes számot tudva azt, hogy az M , N és P kollineáris pontok!
2. Adott az $f = X^3 + aX^2 + X - 1$ polinom, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $f(1) - f(-1) = 4$, bármely a valós szám esetén!
- 5p b) Ha $a = 2$ számítsd ki az f polinomnak $X^2 + X + 1$ polinommal való osztási hányadosát és maradékát!
- 5p c) Határozd meg az a valós számot, amelyre $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, ahol x_1 , x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének $x = 2$ abszcisszájú pontjában, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = 0$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) - 2x) dx = e - 1$.
- 5p b) Határozd meg a $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$ függvény grafikus képének, az Ox tengely körüli forgatásával keletkezett test térfogatát!
- 5p c) Határozd meg az a valós számot tudva azt, hogy $\int_0^a x f(x) dx = 1 + \frac{2a^3}{3}$.