Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Bestimme das dritte Glied der arithmetischen Folge $(a_n)_{n\geq1}$, wenn $a_1=4$ und $a_2=7$.

5p **2.** Gegeben sind x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2-4x+1=0$. Zeige, dass $4x_1x_2-(x_1+x_2)=0$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2^{2x+1}=\frac{1}{8}$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte natürliche zweistellige Zahl, ein Vielfaches von 15 ist .

5p **5.** In dem kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(0,1)$, $B(1,1)$ und $C(3,a)$ gegeben, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, sodass die Punkte A, B und C kollinear sind.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC mit $AB=4\sqrt{3}$, $AC=4$ und $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Berechne $\sin B$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(x)=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Beweise, dass $A(x)A(y)=xyI_2$, für alle reellen Zahlen x und y, wo $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a, sodass $A\left(3^a\right)A\left(3^{a+1}\right)A\left(3^{a+2}\right)=A(27)$.

2. Gegeben ist das Polynom $f=X^3+mX^2+2X-4$, wo m eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Für $m=1$, zeige, dass $f(1)=0$.

5p **b)** Zeige, dass, wenn das Polynom f durch $X+2$ teilbar ist, dann ist der Rest der Division von f durch $X+3$ gleich -1.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl m, wenn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, wo x_1, x_2 und x_3 Wurzeln des Polynoms f sind.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x=0$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **c)** Beweise, dass die Funktion f konvex auf $[-2015,+\infty)$ ist.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Bestimme die Stammfunktion F der Funktion f , sodass $F(1)=\frac{\pi}{4}+1$.

5p **c)** Bestimme die natürliche Zahl n, sodass $\int_0^n x f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 5$.