Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

THEMA I (30 Punkte)

5p **1.** Bestimme die komplexe Zahl z, falls $2\overline{z}-z=1-3i$, wo $\overline{z}$ die konjugierte Zahl von z ist.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, wo m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reellen Zahlen m, wenn der Scheitelpunkt der Parabel, die der Funktion f zugeordnet wird, auf der Ox -Achse liegt.

5p **3.** Löse die Gleichung $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$ in der Menge der reellen Zahlen.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte zweistellige natürliche Zahl verschiedene ungerade Ziffern hat.

5p **5.** Im kartesischen Koordinatensystem xOy werden der Punkt $A(-5,2)$ und die Gerade d mit der Gleichung $y=x+1$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt A geht und senkrecht auf die Gerade d steht.

5p **6.** Zeige, dass $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, für alle reellen Zahlen x.

THEMA II (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrix $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, wo m eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen m, falls $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Für $m=-1$, beweise: falls (a,b,c) eine Lösung des Systems ist, dann ist höchstens eine der Zahlen a, b und c ganz.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen wird die assoziative Verknüpfung $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$ definiert.

5p **a)** Beweise, dass $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl x, für welche $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen a, falls $f(x)*f(y)=f(x+y)$, für alle reellen Zahlen x und y, wobei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

THEMA III (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Beweise, dass der Punkt $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ zu der Tangenten an den Grafen der Funktion f im Punkt mit der Abszisse $x=1$ des Schaubildes der Funktion f, gehört.

5p **c)** Beweise, dass $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.

5p **c)** Für jede natürliche Zahl n, wird die Zahl $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$ gegeben. Beweise, dass $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, für jede natürliche Zahl n, $n\geq 1$.